ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

2 • 2009

МАТЕМАТИКА

УДК 531.36

С. В. Бабенко, А. И. Двирный

Устойчивость линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Мартынюком)

Одержані нові достатні умови асимптотичної стійкості лінійних неперіодичних систем диференціальних рівнянь з кусково-постійними коефіцієнтами.

В данной работе приведены некоторые результаты, позволяющие свести задачу об устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами к вопросу о совместимости некоторой системы линейных матричных неравенств. Метод линейных матричных неравенств является достаточно разработанным методом исследования в теории устойчивости. Его преимущество состоит в том, что он численно реализован в пакете прикладных программ MATLAB.

Рассматривается линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений вида [1]

$$\frac{dx}{dt} = A_{\sigma(t)}x, \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$; $t \geqslant t_0$; $A_{\sigma(t)}$ — кусочно-постоянная матрица, $\sigma(t) = j$ — кусочно-постоянная функция, принимающая последовательно значения из конечного множества $\{1, 2, \ldots, r\}$.

Введем отображение $X\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{K} \subset \mathcal{E}$, где $\mathcal{K}$ — конус симметричных положительно полуопределенных матриц, т. е. $\mathcal{K} = \{H \in \mathcal{E},\ \xi^T H\xi \geqslant 0,\ \xi \in \mathbb{R}^n\}$, $\mathcal{E}$ — пространство симметричных $n \times n$ матриц, $X(t) = xx^T$. Известно [2–4], что это отображение сохраняет устойчивость и переводит линейную систему уравнений (1) в матричную систему уравнений

$$\frac{dX}{dt} = A_jX + XA_j^T, \qquad X(t_0) = X_0 \in \mathcal{K}, \tag{2}$$

позитивную относительно конуса $\mathcal{K}$.

Введем линейные операторы

$$P_j\colon \mathcal{E}\to\mathcal{E}, \qquad P_jX = A_jX + XA_j^T, \qquad j=\overline{1,r}, \qquad G\colon \mathcal{E}\to\mathcal{E}, \qquad GX = (\operatorname{tr} X)I,$$

и систему (2) представим в виде

$$\frac{dX}{dt} = P_jX, \qquad X(t_0) = X_0 \in \mathcal{K}. \tag{3}$$

Определим линейный оператор монодромии

$$\Psi = \prod_{j=1}^{r} e^{P_{r-(j-1)}\overline{\theta}_{r-(j-1)}+\gamma_{r-(j-1)}G(\overline{\theta}_{r-(j-1)}-\underline{\theta}_{r-(j-1)})},$$

где $\overline{\theta}_j$, $\underline{\theta}_j$ — супремум и инфимум соответственно длин промежутков постоянства функции $\sigma(t)$, на которых она принимает значения, равные j; γ_j — константа позитивности оператора P_j относительно конуса $\mathcal{K}$, т.е. неотрицательная константа, для которой $P_j'\mathcal{K}\subset\mathcal{K}$, где $P_j' = P_j + \gamma_jG$ [5].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Если существует положительно определенная матрица $X\in\mathcal{K}$ такая, что*

$$\Psi X \overset{\mathcal{K}}{<} X,$$

то линейная дифференциальная система (1) *асимптотически устойчива.*

Доказательство. Пусть $[\tau_{i,j-1};\,\tau_{i,j})$ — промежутки постоянства функции $\sigma(t)$, на которых она принимает значения, равные j $(j=1,2,\ldots,r)$, $i\in\mathbb{N}$. При этом будем считать, что $\tau_{i,r}=\tau_{i+1,0}$. Тогда существует $l\in\mathbb{N}$ $(l\leqslant r)$ и существует $n\in\mathbb{N}$ такие, что $t\in[\tau_{n+1,l-1};\,\tau_{n+1,l})$.

Известно, что решение уравнения (3) может быть представлено в виде

$$X(t) = \Omega(t,t_0)X_0, \qquad t\geqslant t_0, \tag{4}$$

где $\Omega(t,t_0)$ — матрицант системы (3) [6].

Используя свойство матрицанта, приходим к равенству

$$\begin{aligned}\Omega(t,t_0) &= \Omega(t,\tau_{n+1,l-1})\Omega(\tau_{n+1,l-1},\tau_{n+1,l-2})\cdots\Omega(\tau_{n+1,1},\tau_{n,r})\cdots\Omega(\tau_{n,r},\tau_{n,r-1})\times\\ &\times\Omega(\tau_{n,r-1},\tau_{n,r-2})\cdots\Omega(\tau_{n,1},\tau_{n-1,r})\cdots\Omega(\tau_{1,r},\tau_{1,r-1})\Omega(\tau_{1,r-1},\tau_{1,r-2})\cdots\times\\ &\times\Omega(\tau_{1,1},\tau_{1,0}) = e^{P_l(t-\tau_{n+1,l-1})}e^{P_{l-1}(\tau_{n+1,l-1}-\tau_{n+1,l-2})}\cdots e^{P_1(\tau_{n+1,1}-\tau_{n,r})}\times\\ &\times e^{P_r(\tau_{n,r}-\tau_{n,r-1})}e^{P_{r-1}(\tau_{n,r-1}-\tau_{n,r-2})}\cdots e^{P_1(\tau_{n,1}-\tau_{n-1,r})}\cdots e^{P_r(\tau_{1,r}-\tau_{1,r-1})}\times\\ &\times e^{P_{r-1}(\tau_{1,r-1}-\tau_{1,r-2})}\cdots e^{P_1(\tau_{1,1}-\tau_{1,0})}.\end{aligned}$$

Учитывая неравенство $P_j(\tau_{j,i}-\tau_{j,i-1}) \overset{\mathcal{K}}{\leqslant} P_j\overline{\theta_j}+\gamma_jG(\overline{\theta_j}-\underline{\theta_j})$ и свойство квазимонотонности оператора P_j [7], для матрицанта $\Omega(t,t_0)$ получаем оценку

$$\begin{aligned}\Omega(t,t_0) &\leqslant e^{P_l(t-\tau_{n+1,l-1})}\prod_{j=1}^{l-1}e^{P_{l-j}\overline{\theta}_{l-j}+\gamma_{l-j}G(\overline{\theta}_{l-j}-\underline{\theta}_{l-j})}\left(\prod_{j=0}^{r-1}e^{P_{r-j}\overline{\theta}_{r-j}+\gamma_{r-j}G(\overline{\theta}_{r-j}-\underline{\theta}_{r-j})}\right)^n =\\ &= e^{P_l(t-\tau_{n+1,l-1})}\prod_{j=1}^{l-1}e^{P_{l-j}\overline{\theta}_{l-j}+\gamma_{l-j}G(\overline{\theta}_{l-j}-\underline{\theta}_{l-j})}\Psi^n.\end{aligned}$$

Таким образом, ввиду (4) приходим к следующему результату:

$$X(t) \leqslant e^{P_l(t-\tau_{n+1,l-1})} \prod_{j=1}^{l-1} e^{P_{l-j}\overline{\theta}_{l-j}+\gamma_{l-j}G(\overline{\theta}_{l-j}-\underline{\theta}_{l-j})} \Psi^n X_0. \tag{5}$$

По условию $X \overset{\mathcal{K}}{>} 0$ — положительно определенная матрица, удовлетворяющая неравенству $\Psi X \overset{\mathcal{K}}{<} X$. Тогда оператор Ψ является y-дихотомическим, т. е.

$$1 \overline{\in} \sigma(\Psi), \tag{6}$$

где $\sigma(\Psi)$ — спектр оператора Ψ.

Построим последовательность

$$0 < \cdots < \Psi^n X < \Psi^{n-1} X < \cdots < \Psi^2 X < \Psi X < X.$$

Для данной последовательности существует $\overline{X} \in \mathcal{K}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \Psi^n X = \overline{X}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \Psi^n X = \lim\limits_{n\to\infty} \Psi(\Psi^{n-1} X) = \Psi \lim\limits_{n\to\infty} \Psi^{n-1} X = \Psi \overline{X} = \overline{X}$. Допустим, что $X \neq 0$, тогда $\overline{X}$ — собственный вектор оператора Ψ и $\lambda = 1$ — собственное значение оператора Ψ, соответствующее собственному вектору $\overline{X}$, что противоречит соотношению (6). Следовательно, приходим к выводу, что $\overline{X} = 0$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \Psi^n X = 0. \tag{7}$$

Пусть $Y \in \operatorname{int} \mathcal{K}$. Для элемента Y введем к рассмотрению X-норму [5]:

$$\|Y\|_X = \inf\{\beta \mid -\beta X \leqslant Y \leqslant \beta X\}, \qquad \beta \geqslant 0.$$

Предположим, что матрица Y принадлежит ε-окрестности X ($\varepsilon > 0$), т. е. $Y \leqslant (\|Y\|_X + \varepsilon) X$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \Psi^n Y \leqslant \lim_{n\to\infty} (\Psi^n (\|Y\|_X + \varepsilon) X) = \lim_{n\to\infty} ((\|Y\|_X + \varepsilon) \Psi^n X) =$$
$$= (\|Y\|_X + \varepsilon) \lim_{n\to\infty} \Psi^n X.$$

Ввиду соотношения (7) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \Psi^n Y = 0.$$

Таким образом, осуществив переход к пределу при $n \to \infty$ в оценке (5), получаем, что $X(t) \to 0$, когда $t \to \infty$:

$$0 \leqslant \lim_{t\to\infty} X(t) \leqslant \lim_{t\to\infty} e^{P_l(t-\tau_{n+1,l-1})} \prod_{j=1}^{l-1} e^{P_{l-j}\overline{\theta}_{l-j}+\gamma_{l-j}G(\overline{\theta}_{l-j}-\underline{\theta}_{l-j})} \Psi^n X_0 \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} e^{P_l\overline{\theta}_l} \prod_{j=1}^{l-1} e^{P_{l-j}\overline{\theta}_{l-j}+\gamma_{l-j}G(\overline{\theta}_{l-j}-\underline{\theta}_{l-j})} \Psi^n X_0 =$$
$$= e^{P_l\overline{\theta}_l} \prod_{j=1}^{l-1} e^{P_{l-j}\overline{\theta}_{l-j}+\gamma_{l-j}G(\overline{\theta}_{l-j}-\underline{\theta}_{l-j})} \lim_{n\to\infty} \Psi^n X_0 = 0.$$

Т. е. дифференциальная система уравнений (1) асимптотически устойчива. Теорема доказана.

1. *Zhai G., Hu Bo, Yasuda K., Michel A.* Piecewise Lyapunov functions for switched systems with average dwell time // Asian J. Control. – 2000. – **2**, No 3. – P. 192–197.
2. *Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Риббенс-Павелла М.* Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. – Киев: Наук. думка, 1984. – 308 с.
3. *Постников Н. С., Сабаев Е. Ф.* Матричные системы сравнения и их приложения к задачам автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. – 1981. – **42**, № 3. – С. 24–34.
4. *Michel A. N., Wang K., Hu B.* Qualitative theory of dynamical systems. – New York: Marcel Dekker, 2001. – 707 p.
5. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев В. И.* Позитивные линейные системы. – Москва: Наука, 1985. – 256 с.
6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.
7. *Двирный А. И., Слынько В. И.* Об устойчивости линейных импульсных систем относительно конуса // Доп. НАН України. – 2004. – № 4. – С. 42–48.

Академия пожарной безопасности
им. Героев Чернобыля, Черкассы

Поступило в редакцию 15.07.2008

S. V. Babenko, A. I. Dvirny

The stability of linear systems of ordinary differential equations with piecewise constant coefficients

A system of ordinary differential equations with piecewise constant coefficients is investigated. The conditions for the asymptotic stability of such a system are established.