(ii) $2 \notin \Pi(L)$ *і кожна силовська p-підгрупа L скінченна і є силовською p-підгрупою всієї групи G для будь-якого* $p \in \Pi(L)$;

(iii) підгрупа L абелева;

(iv) будь-яка підгрупа L є G-інваріантною.

Навпаки, якщо G — періодична FC-група, яка задовольняє умови (i)–(iv), то G — PST-група.

Наслідок. *Нехай G — періодична локально розв'язна PST-група. Якщо G — FC-група, то будь-яка підгрупа G буде PST-групою.*

1. *Schmidt R.* Subgroups lattices of groups. – Berlin: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.
2. *Zacher G.* I gruppi risolubili finite in cui i sottogruppi di composizione coincidono con i sottogruppi quasi – normali // Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis, mat. e natur. – 1964. – **37**, No 8. – P. 150–154.
3. *Robinson D. J. S.* The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation // J. Austral. Math. Soc. – 2001. – **70**. – P. 143–159.
4. *Beidleman J. C., Brewster B., Robinson D. J. S.* Criteria for permutability to be transitive in finite groups // J. Algebra. – 1999. – **222**. – P. 400–412.
5. *Kegel O. H.* Sylow – Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. – 1962. – **78**. – P. 205–221.
6. *Agrawal R. K.* Finite groups whose subnormal subgroups permute with all Sylow subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – **47**. – P. 77–83.
7. *Alejandre V. J., Ballester-Bolinches A., Pedraza-Aguilera M. C.* Finite soluble groups with permutable subnormal subgroups // J. Algebra. – 2001. – **240**. – P. 705–722.
8. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R.* Sylow permutable subnormal subgroups of finite groups // Bull. Austral Math. Soc. – 2001. – **64**, No 3. – P. 479–486.
9. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R.* Sylow permutable subnormal subgroups of finite groups // J. Algebra. – 2002. – **251**, No 2. – P. 727–738.

Дніпропетровський національний університет

Надійшло до редакції 31.03.2008

УДК 519.41/47

М. М. Семко, М. М. Пискун

Про деякі узагальнення наближено нормальних підгруп

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

A subgroup H of the group G is called almost polycyclically approximate to a normal one (in G), if H includes a subgroup L normal in H^G *such that a factor-group* H^G/L *is almost polycyclic. A group G is said to be an anti PC-group, if every its non-polycyclic-by-finite subgroup is almost polycyclically approximate to a normal one. The study of generalized soluble anti PC- groups is finished in the present paper.*

Нехай G — група. Її підгрупа H називається наближено нормальною в G, якщо H має скінченний індекс у своєму нормальному замиканні $K = H^G$. У цьому випадку H включає нормальну в K підгрупу L, для якої факторгрупа K/L скінченна. Такого роду підгрупи були введені в розгляд Б. Нейманом [1]. У вказаній роботі він описав групи, усяка підгрупа яких є наближено нормальною. Такі групи мають скінченний комутант, зокрема, вони є FC-групами. Вивчення впливу властивостей наближено нормальних підгруп на структуру групи було продовжено іншими дослідниками. Так, у роботі Л. А. Курдаченка, М. Ф. Кузенного і М. М. Семка [2] розглянуті групи, у яких система всіх наближено нормальних підгруп буде щільною. Досить недавно італійськими алгебраїстами розпочалося активне вивчення впливу системи наближено нормальних підгруп на будову групи (див., напр., [3–6]). У роботі [7] було введено нижчеподане узагальнення наближено нормальних підгруп. Підгрупа H групи G називається майже поліциклічно наближеною до нормальної (в G), якщо H містить у собі нормальну в H^G підгрупу L, для якої факторгрупа H^G/L буде майже поліциклічною. Ці підгрупи будуть природним узагальненням наближено нормальних підгруп. Першим природним завданням тут є опис груп, усі підгрупи яких майже поліциклічно наближені до нормальної. Тут має місце повний аналог результату Б. Неймана — такі групи мають майже поліциклічний комутант. Цей результат можна отримати з результатів роботи [8]. У роботі [8] було розглянуто інше розширення поняття наближено нормальної підгрупи. Таким розширенням були підгрупи H групи G, для яких впорядкована за включенням система підгруп $\{L \mid H \leqslant L \leqslant G\}$ задовольняє умову максимальності. Зразу відзначимо, що це поняття не буде еквівалентним поняттю, яке введене вище. У цьому можна впевнитись, розглянувши нижченаведений приклад.

Нехай p — просте число, $\langle a\rangle$ — циклічна група порядку p, $\langle g\rangle$ — нескінченна циклічна група,

$$G = \langle g\rangle wr\langle g\rangle = A\lambda\langle g\rangle \text{ —}$$

вінцевий добуток цих двох циклічних груп, A — базова підгрупа цього вінцевого добутку. За конструкцією A буде нескінченною елементарною абелевою p-підгрупою, а отже, група G не є (майже) поліциклічною. Ми можемо розглядати A як циклічний модуль над груповим кільцем $J = F_p\langle g\rangle$ нескінченної циклічної групи над простим полем F_p. Це тягне за собою ізоморфізм $A \cong J/\operatorname*{Ann}_J(a)$. У свою чергу, $\operatorname*{Ann}_J(a)$ буде ідеалом у кільці J. Оскільки кожний ненульовий ідеал кільця J має скінченний індекс в J, то нескінченність A доводить рівність $\operatorname*{Ann}_J(a) = \langle 0\rangle$. Зокрема, звідси випливає, що і $C_A(g) = \langle 1\rangle$. Нехай тепер H — нормальне замикання підгрупи $\langle g\rangle$ у групі G. Припустимо, що H є поліциклічною. З наслідку 1.5 роботи [7] отримаємо включення $g \in PC(G)$, яке у свою чергу доводить той факт, що і факторгрупа $A/C_A(g)$ повинна бути поліциклічною. Оскільки A є періодичною, то це означає, що $A/C_A(g)$ мусить бути скінченною. Але ж у цьому випадку $C_A(g) \neq \langle 1\rangle$. Однак, як ми вже бачили вище, це є неможливим. Отримане протиріччя показує, що підгрупа H не може бути поліциклічною. Інакше кажучи, підгрупа $\langle g\rangle$ не є майже поліциклічно наближеною до нормальної. Нехай тепер

$$K_1 \leqslant K_2 \leqslant \cdots \leqslant K_n \leqslant \cdots \text{ —}$$

довільна зростаюча послідовність підгруп, що містять у собі $\langle g\rangle$. З включення $\langle g\rangle \leqslant K_n$ отримаємо напівпрямий розклад $K_n = B_n\lambda\langle g\rangle$. Це приводить нас до іншої зростаючої послідовності підгруп:

$$B_1 \leqslant B_2 \leqslant \cdots \leqslant B_n \leqslant \cdots,$$

кожна з яких міститься в A та буде $\langle g\rangle$-інваріантною. Оскільки групове кільце $F_p\langle g\rangle$ є нетеровим, то і циклічний $F_p\langle g\rangle$-модуль A буде нетеровим. Це означає, що A не містить у собі строго зростаючих послідовностей $\langle g \rangle$-інваріантних підгруп. Таким чином, знайдеться такий номер m, що $B_m = B_{m+k}$ для кожного натурального k. У свою чергу, тоді матимемо $K_m = K_{m+k}$ для кожного натурального k. Отже, впорядкована за включенням система підгруп $\{L \mid \langle g \rangle \leqslant L \leqslant G\}$ задовольняє умову максимальності.

Цей приклад також показує, що введене поняття підгрупи, майже поліциклічно наближеної до нормальної, є більш робочим і ефективним. За допомогою поняття майже поліциклічно наближених до нормальних підгруп може бути отримана будова класу PC-груп, що є значним розширенням класу FC-груп. Але спочатку нагадаємо деякі необхідні для подальшого означення (див. [9, розділ 3]).

Нехай X — клас груп. Будемо говорити, що група G має X-класи спряжених елементів або що G є XC-групою, якщо факторгрупа $G/C_G\,(g^G)$ належить до класу X для кожного елемента g групи G. Тут через g^G позначається клас усіх елементів, які спряжені з елементом g, тобто підмножина $\{g^x = x^{-1}gx \mid x \in G\}$.

Природними розширеннями класу скінченних груп є клас C усіх черніковських груп та клас P усіх майже поліциклічних груп. Тому якщо $X = C$, то клас усіх CC-груп — це точнісінько клас усіх груп з черніковськими класами спряженних елементів, який був введений у розгляд Я. Д. Половицьким [10]. Якщо ж $X = P$, то приходимо до класу PC-груп або до класу всіх груп з майже поліциклічними класами спряженості. Вивчення цього класу тільки починається [8, 11]. Цей клас допускає таку характеристику. Якщо G — PC-група, то з теореми 2.2 роботи [8] отримуємо, що для будь-якого елемента $g \in G$ нормальне замикання $H_g = \langle g \rangle^G$ є майже поліциклічною підгрупою. Звідси отримуємо, що і для будь-якої майже поліциклічної підгрупи F групи G її нормальне замикання F^G є майже поліциклічною підгрупою. Іншими словами, всяка майже поліциклічна підгрупа F групи G майже поліциклічно наближена до нормальної. Більше того, ця властивість є характеристичною для PC-груп. Тому природно виникає питання про будову групи G, в якій усі підгрупи, крім майже поліциклічних, майже поліциклічно наближені до нормальних. Такі групи називатимемо анти-PC-групами. Відзначимо, що аналогічним чином виникали анти-FC-групи. Нагадаємо, що FC-групу можна охарактеризувати як групу, усі скінченно породжені підгрупи яких є майже нормальними (відзначимо, що кожна скінченно породжена підгрупа FC-групи є майже поліциклічною). Анти-FC-групи — це групи, в яких кожна нескінченно породжена підгрупа є майже нормальною. Ці групи вивчались у роботі [12]. Інший приклад такого підходу — групи, дуальні до груп Бера. Групи Бера можна визначити як групи, кожна скінченно породжена (поліциклічна) підгрупа яких є субнормальною. Їх антиподами будуть групи, кожна нескінченно породжена підгрупа яких є субнормальною. Такі групи вивчались у роботі [13].

Вивчення анти-PC-груп було почато в роботі [7]. Основний результат цієї роботи показує, що при деяких природних обмеженнях анти-PC-групи вичерпуються групами з майже поліциклічними комутантами і мінімаксними групами. Випадок мінімаксних груп вимагав окремого розгляду. Вивченню мінімаксних анти-PC-груп і присвячена дана робота.

Теорема 1. *Нехай G — локально скінченна група. Якщо G — анти-PC-група, то G — група одного з таких типів:*

(1) G — група зі скінченним комутантом;

(2) G — майже квазіциклічна група.

Нехай G — абелева група скінченного спеціального рангу. Виберемо в ній таку скінченно породжену підгрупу без скруту H, що G/H є періодичною. Позначимо через D/H подільну частину G/H і покладемо $\mathrm{Sp}(G) = \Pi(D/H)$. Якщо K — інша скінченно породжена підгрупа без скруту, що визначає періодичну факторгрупу G/K, то обидва фактора $H/(H \bigcap K)$ та $K/(H \bigcap K)$ скінченні. Це означає, що подільні частини G/H та G/K ізоморфні, так що множина $\mathrm{Sp}(G)$ є інваріантом групи G.

Якщо G — розв'язна група скінченного спеціального рангу, то $\mathrm{Sp}(G)$ визначається як об'єднання спектрів факторів її ряду комутантів.

Група G називається узагальнено радикальною, якщо вона має зростаючий ряд підгруп, фактори якого або локально нільпотентні, або локально скінченні.

Теорема 2. *Нехай G — неперіодична узагальнено радикальна група, яка містить у собі нескінченну періодичну підгрупу. Група G тоді і тільки тоді буде анти-PC-групою, коли G — група одного з таких типів:*

(1) G — група, усі підгрупи якої поліциклічно наближені до нормальних, зокрема, вона має майже поліциклічний комутант.

(2) $[G, G]$ містить у собі таку нормальну в G квазіциклічну підгрупу D, що G/D майже поліциклічна.

(3) G задовольняє такі умови:

(3A) центр групи G містить у собі таку квазіциклічну підгрупу D, що G/D не містить у собі нескінченних періодичних підгруп;

(3B) $[G/D, G/D] = K/D$ — майже поліциклічна підгрупа;

(3C) G/D є добутком двох нормальних підгруп A/D та L/D, де L/D — майже поліциклічна, а A/D — абелева мінімаксна група без скруту, у якої $\mathrm{Sp}(G/K) = \{p\}$, де $\{p\} = \Pi(D)$;

(3D) якщо A — PC-підгрупа групи G, то $A/(A \bigcap D)$ буде скінченно породженою. Зокрема, кожна підгрупа G, що не має скінченної системи породжувальних елементів, містить у собі D.

Через $P(G)$ будемо позначати максимальну нормальну періодичну підгрупу групи G.

Теорема 3. *Нехай G — неперіодична майже розв'язна мінімаксна група, у якої $P(G) = \langle 1 \rangle$. Якщо G є анти-PC-групою, то G — група одного з таких типів:*

(1) G — група, усі підгрупи якої поліциклічно наближені до нормальних, зокрема, вона має майже поліциклічний комутант.

(2) G задовольняє такі умови:

(2A) G містить у собі таку нормальну раціонально G-незвідну абелеву підгрупу D без скруту, що G/D майже поліциклічна;

(2B) якщо U — підгрупа G, що не має скінченної множини породжувальних елементів, то $U \bigcap D$ також не має скінченної множини породжувальних елементів.

(3) G задовольняє такі умови:

(3 A) G містить у собі таку нормальну раціонально G-незвідну абелеву підгрупу D без скруту, що G/D є добутком двох нормальних підгруп A/D та Q/D, де Q/D — скінченно породжена, а A/D — абелева мінімаксна група без скруту;

(3B) якщо U — підгрупа G, що не має скінченної множини породжувальних елементів, то $U \bigcap D$ також не має скінченної множини породжувальних елементів.

Для деяких частинних випадків теорему 3 можна деталізувати. Зокрема має місце

Теорема 4. *Нехай G — неперіодична майже розв'язна мінімаксна група, у якої $P(G) = \langle 1 \rangle$. Припустимо також, що $\zeta(G)$ не має скінченної системи породжувальних елементів. Група G тоді і тільки тоді буде анти-PC-групою, коли G — група одного з таких типів:*

(1) G — група, усі підгрупи якої поліциклічно наближені до нормальних, зокрема, вона має майже поліциклічний комутант.

(2) G має ряд нормальних підгруп $B \leqslant Z \leqslant G$, що Z — сервантна підгрупа центру, B — скінченно породжена підгрупа, Z/B — квазіциклічна p-група, G/Z — скінченно породжена. Більше того, якщо U — підгрупа Z, що не має скінченної множини породжувальних елементів, то U має в Z скінченний індекс.

(3) G має ряд нормальних підгруп $B \leqslant Z \leqslant G$, які задовольняють такі умови:

(3A) Z — сервантна підгрупа центру групи G, B — скінченно породжена підгрупа, Z/B — квазіциклічна p-група, p — просте число;

(3B) якщо U — підгрупа G, що не має скінченної множини породжувальних елементів, то $U \cap Z$ має в Z скінченний індекс;

(3C) G/Z є добутком двох нормальних підгруп A/Z та L/Z, де L/Z — скінченно породжена, а A/Z — абелева мінімаксна група без скруту, у якої $\mathrm{Sp}(G/K) = \{p\}$.

1. *Neumann B. H.* Groups with finite classes of conjugate subgroups // Math. Z. – 1955. – **63**, No 1. – P. 76–96.
2. *Курдаченко Л. А., Кузенний М. Ф., Семко М. М.* Групи з щільною системою нескінченних підгруп // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1985. – № 3. – С. 7–9.
3. *Franciosi S., de Giovanni F.* Groups satisfying the minimal condition on certain non-normal subgroups // “Groups – Korea 94”. – Berlin: Walter de Gruyter, 1995. – P. 107–118.
4. *Galoppo A.* Groups satisfying the maximal condition on non-nearly normal subgroups // Ric. mat. – 2000. – **49**, No 2. – P. 213–220.
5. *Franciosi S., de Giovanni F., Kurdachenko L. A.* Groups with restrictions on non-subnormal subgroups // Ibid. – 1997. – **46**, No 2. – P. 307–320.
6. *Musella C.* Isomorphisms between lattices of nearly normal subgroups // Note mat. – 2000/2001. – **20**, No 1. – P. 43–52.
7. *Пискун М. М.* О строении групп с некоторыми системами подгрупп, близких к нормальным // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. фіз.-мат. наук. – 2006. – Вип. 7. – С. 24–34.
8. *Franciosi S., de Giovanni F., Tomkinson M. J.* Groups with polycyclic-by-finite conjugacy classes // Boll. Unione mat. ital. – 1990. – **4B**, No 7. – P. 35–55.
9. *Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya.* Artinian modules over group rings. – Basel: Birkhauser, 2007. – 245 p.
10. *Половицкий Я. Д.* Локально экстремальные и слойно экстремальные группы // Мат. сб. – 1962. – **58**, № 2. – С. 685–694.
11. *Kurdachenko L. A., Otal J., Soules P.* Groups with polycyclic-by-finite conjugate classes of subgroups // Communs Algebra. – 2004. – **32**, No 12. – P. 4769–4784.
12. *Franciosi S., de Giovanno F., Kurdachenko L. A.* On groups with many almost normal subgroups // Ann. mat. pura ed Appl. – 1995. – **169**, No 4. – P. 35–65.
13. *Heineken H., Kurdachenko L. A.* Groups with subnormality for all sub-groups that are not finitely generated // Annali Mat. – 1995. – **169**. – P. 203–232.

Національний університет державної податкової служби України, Ірпінь

Надійшло до редакції 12.03.2008