

Э. Л. Гарт

Проекционно-итерационные модификации метода конечных элементов в краевых задачах теории упругости

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. С. Гудрамовичем)

Projective-iterative modifications of the finite-element method to solve the minimum problem in Hilbert spaces are proposed. The effective algorithm for solving the two-dimensional elastic problem of the stress-strain state of an axial loaded plate with rectangular hole, contact problems, and the three-dimensional elastic problem for a multilayer solid is developed.

Среди приближенных методов решения уравнений в нормированных пространствах важное место занимают итерационные и проекционные методы [1]. Сочетание идей этих методов нашло отражение в группах проекционно-итеративных [2], многосеточных [3] и проекционно-итерационных (ПИ) методов [1, 4, 5]. ПИ методы являются одними из эффективных численных методов решения бесконечномерных задач, о чем свидетельствует практика их применения к решению эллиптических краевых задач. Развитие этих методов и применение разработанных модификаций к решению различных классов задач теории упругости имеет важное прикладное значение.

В данной работе предлагаются теоретически обоснованные ПИ модификации методов решения задач условной минимизации функционалов в гильбертовых пространствах и приводятся результаты исследования их вычислительной эффективности при решении некоторых классов краевых задач теории упругости.

1. Пусть на некотором множестве Ω вещественного гильбертова пространства H задан ограниченный снизу функционал $F(u)$,

$$\inf_{u \in \Omega} F(u) = F^* > -\infty.$$

Поставим задачу минимизации $F(u)$ на Ω :

$$F(u) \rightarrow \inf, \quad u \in \Omega. \quad (1)$$

Рассмотрим вариант ПИ метода решения задачи (1), основанный на применении к решению последовательности задач условной минимизации метода поточечной релаксации [6]. Аппроксимируем функционал $F(u)$ последовательностью приближенных функционалов $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ ($n = N, N + 1, \dots$), заданных в некоторых конечномерных гильбертовых пространствах \tilde{H}_n , причем $\inf_{\tilde{u}_n \in \tilde{H}_n} \tilde{F}_n(\tilde{u}_n) = \tilde{F}_n^* > -\infty$. Для каждого из $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ поставим задачу на $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n) \rightarrow \inf, \quad \tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n. \quad (2)$$

Пусть \tilde{H}_n — пространство векторов размерности $N = N(n)$ с евклидовой метрикой. Задав начальное приближение $\tilde{u}_n^{(0)} = \{\tilde{u}_{1n}^{(0)}, \dots, \tilde{u}_{Nn}^{(0)}\}$, построив по методу поточечной релаксации k_n приближений $\tilde{u}_n^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, k_n$) для функционала $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ на $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$ и взяв последнее из них в качестве начального приближения к решению задачи минимизации функционала $\tilde{F}_{n+1}(\tilde{u}_{n+1})$ на множестве $\tilde{\Omega}_{n+1}$, получим последовательность $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}$ приближений к точке минимума u^* исходного функционала на Ω : $\tilde{u}_n^{(k+1)} = \{u_{1n}^{(k+1)}, \dots, u_{Nn}^{(k+1)}\}$; $u_{in}^{(k+1)}$ определяются как решение неравенства

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n(u_{1n}^{(k+1)}, \dots, u_{i-1,n}^{(k+1)}, u_{in}^{(k+1)}, u_{i+1,n}^{(k)}, \dots, u_{Nn}^{(k)}) &\leq \\ &\leq \tilde{F}_n(u_{1n}^{(k+1)}, \dots, u_{i-1,n}^{(k+1)}, v_i, u_{i+1,n}^{(k)}, \dots, u_{Nn}^{(k)}) \end{aligned} \quad (3)$$

для всех v_i таких, что

$$\begin{aligned} (u_{1n}^{(k+1)}, \dots, u_{i-1,n}^{(k+1)}, v_i, u_{i+1,n}^{(k)}, \dots, u_{Nn}^{(k)}) &\in \tilde{\Omega}_n, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \tilde{u}_{n+1}^{(0)} &= \Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)} \quad (k = 0, 1, \dots, k_n - 1; n = 1, 2, \dots; \tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{\Omega}_1). \end{aligned}$$

Здесь Φ_n — линейный оператор, ставящий во взаимно однозначное соответствие каждому элементу $u_n \in H_n$ элемент $\tilde{u}_n \in \tilde{H}_n$; Φ_n^{-1} — оператор обратного отображения; множества Ω_n и $\tilde{\Omega}_n$ связаны соотношением $\tilde{\Omega}_n = \Phi_n\Omega_n$.

Теорема 1. Пусть функционалы $F(u) \in C^1(\Omega)$ и $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n) \in C^1(\tilde{\Omega}_n)$ сильно выпуклы, причем существует число $C > 0$ такое, что $\tilde{\chi}_n \geq C$, где $\tilde{\chi}_n$ — константа сильной выпуклости $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$, и выполнено условие

$$|\tilde{F}_n(\tilde{u}_n) - F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n)| \leq \tilde{\gamma}_n \quad (4)$$

для всех $\tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n$ с $\tilde{\gamma}_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$; последовательность подпространств H_n предельно плотна в H , а множества Ω и $\tilde{\Omega}_n$ связаны условием: для любого $u \in \Omega$ существует последовательность $\{\tilde{u}_n\}$, $\tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n^{-1}\tilde{u}_n = u$, т.е. точка u^* является (Ω_n) -аппроксимруемой [7].

Тогда последовательность $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}$, где $\tilde{u}_n^{(k_n)}$ определяются формулами (3), сходится к точке u^* минимума $F(u)$ на Ω . При выполнении условия

$$|\tilde{F}_n(\bar{\Phi}_n u^*) - F(u^*)| \leq \tilde{\beta}_n, \quad \tilde{\beta}_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

последовательность $\{\tilde{u}_n^{(k_n)}\}$ сходится к $\bar{\Phi}_n u^*$, где $\bar{\Phi}_n$ — линейный оператор, являющийся расширением Φ_n на пространство H .

2. Пусть H — некоторое вещественное сепарабельное гильбертово пространство, на котором задан ограниченный снизу функционал $F(u)$ из класса $C^1(H)$ непрерывно дифференцируемых на H функционалов, $\inf_{u \in H} F(u) = F^* > -\infty$. Поставим задачу (1) минимизации $F(u)$ на $\Omega = H$. Так же, как и ранее, получим последовательность приближенных задач (2) на $\tilde{\Omega}_n = \tilde{H}_n$, для решения которых будем использовать итерационный метод сопряженных градиентов таким образом, что строится лишь несколько приближений $\tilde{u}_n^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, k_n - 1, k_n \leq K$, K — некоторое натуральное число), последнее из которых

используется в качестве начального приближения к решению следующей $(n + 1)$ -й задачи минимизации. В результате получим последовательность $\{\tilde{u}_n^{(k_n)}\}$:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_n^{(k+1)} &= \tilde{u}_n^{(k)} - \tilde{\alpha}_n^{(k)} p_n^{(k)}, & \tilde{u}_{n+1}^{(0)} &= \Phi_{n+1} \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)} \\ (k &= 1, 2, \dots, k_n - 1; n = N, N + 1, \dots; \tilde{u}_N^{(0)} \in \tilde{H}_N), \\ \tilde{p}_n^{(0)} &= \tilde{F}'_n(\tilde{u}_n^{(0)}), & \tilde{p}_n^{(k)} &= \tilde{F}'_n(\tilde{u}_n^{(k)}) - \tilde{\beta}_n^{(k)} \tilde{p}_n^{(k-1)} \\ (k &= 1, 2, \dots, k_n; n = N, N + 1, \dots),\end{aligned}\tag{5}$$

где величины $\tilde{\alpha}_n^{(k)}$, $\tilde{\beta}_n^{(k)}$ выбираются из условий

$$\tilde{g}_n^{(k)}(\tilde{\alpha}_n^{(k)}) = \min_{\alpha \geq 0} \tilde{g}_n^{(k)}(\alpha), \quad \tilde{g}_n^{(k)}(\alpha) \equiv \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)} - \alpha p_n^{(k)})\tag{6}$$

и

$$\tilde{\beta}_n^{(k)} = \begin{cases} \frac{\tilde{F}'_n(\tilde{u}_n^{(k)}), \tilde{F}'_n(\tilde{u}_n^{(k-1)}) - \tilde{F}'_n(\tilde{u}_n^{(k)})}{|\tilde{F}'_n(\tilde{u}_n^{(k-1)})|^2}, & k \in I_1^n \\ 0, & k \in I_2^n \end{cases},\tag{7}$$

а множества индексов I_1^n и I_2^n таковы, что $I_1^n \cup I_2^n = \{0, 1, 2, \dots, k_n\}$, $0 \in I_2^n$. В зависимости от выбора множеств I_1^n и I_2^n можно получить различные проекционно-итерационные варианты метода сопряженных градиентов.

Предположим, что функционалы $F(u)$ и $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ удовлетворяют условию близости (4) для всех $\tilde{u}_n \in \tilde{H}_n$ с $\tilde{\gamma}_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, причем $\sum_{n=N}^{\infty} \tilde{\gamma}_n < \infty$ и условию

$$\|\tilde{F}'_n(\tilde{u}_n) - \tilde{\Phi}_n F'(\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n)\| \leq \tilde{\delta}_n \quad \text{с} \quad \tilde{\delta}_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,\tag{8}$$

последовательность подпространств H_n предельно плотна в H , а пространства H и \tilde{H}_n связаны следующим условием (A): для любого $u \in H$ существует последовательность $\{\tilde{u}_n\}$, $\tilde{u}_n \in \tilde{H}_n$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n = u$.

Теорема 2. Пусть функционалы $F(u) \in C^1(H)$, $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n) \in C^1(\tilde{H}_n)$ являются сильно выпуклыми, а также выполнены условие Липшица для градиента $F'(u)$

$$\|F'(v) - F'(u)\| \leq L\|v - u\|,$$

$u, v \in H$, $L = \text{const} > 0$, условие (A) и условия близости (4), (8).

Тогда при любом выборе множества индексов I_1^n , I_2^n , $0 \in I_2^n$ и любом начальном приближении $\tilde{u}_N^{(0)} \in \tilde{\Omega}_N$ для последовательности $\{\tilde{u}_n^{(k_n)}\}$, удовлетворяющей условиям (5)–(7), справедливы оценки

$$\begin{aligned}\|\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)} - u^*\|^2 &\leq 2\eta^{-1}(\tilde{\gamma}_n + (\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(0)}) - F^*)q_n^{k_n}), \\ 0 \leq F(\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)}) - F(u^*) &\leq \eta^{-1} \|F'(\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)})\|^2, \\ \|\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)} - u^*\| &\leq \eta^{-1} \|F'(\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)})\|,\end{aligned}$$

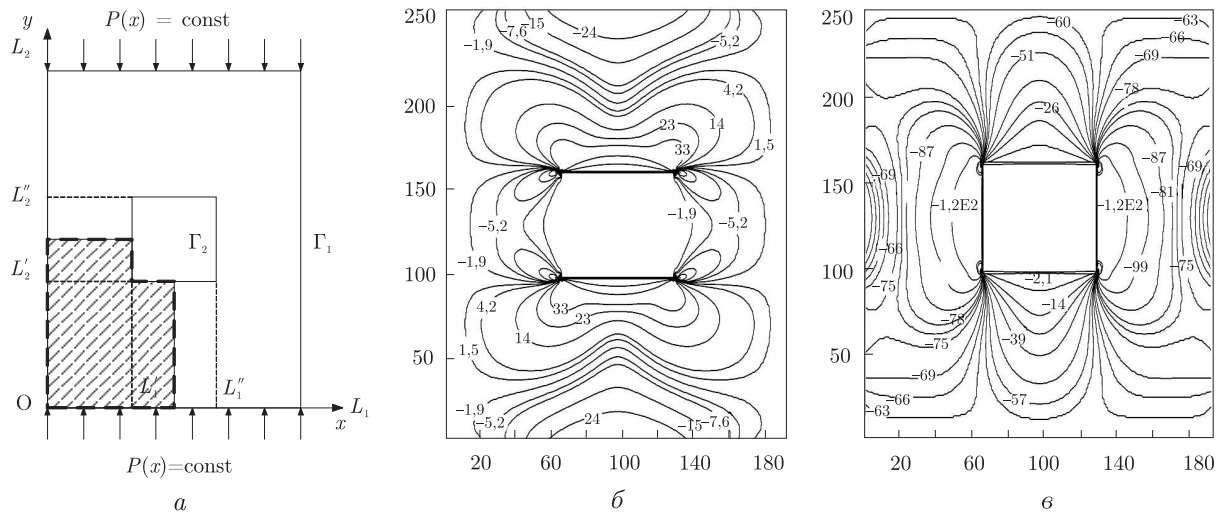


Рис. 1. Геометрия пластины и линии главных напряжений σ_1, σ_2

где

$$q_n = \frac{1 - \eta^3}{2L_n(\eta^2 + L_n^2)}, \quad L_n = 2\delta_n + CL, \quad 0 < q_n < 1,$$

η — константа сильной выпуклости функционала F .

3. Приведем результаты исследования предложенных модификаций ПИ методов при решении плоской [6], пространственной [8] и контактных [9] задач теории упругости.

Рассмотрено напряженно-деформированное состояние (НДС) упругой изотропной пластины с прямоугольным вырезом в центре (рис. 1, а) при равномерной осевой нагрузке. На внешней и внутренней границах Γ_1 и Γ_2 напряжения отсутствуют. Размеры пластины: $L_1 = 0,08$ м, $L_2 = 0,06$ м, $h = 0,0073$ м, $(L_1'' - L_1') \times (L_2'' - L_2') = 0,02 \times 0,02$ м; модуль упругости $E = 3330$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,34$.

ПИ вариант метода конечных элементов (МКЭ) был реализован на вложенных вдвое конечно-элементных сетках (13×17 , 25×33 , 49×65 , 97×129 , 193×257) из прямоугольных лагранжевых элементов первой степени ($h_{n+1} = h_n/2$) с точностью вычислений, равной 10^{-6} , при параметре релаксации $\omega = 1,7$. Вычисления производились на Pentium III, 933 МГц с 512 Мб оперативной памяти при нулевом начальном приближении, задаваемом на грубой сетке (13×17), решение исходной задачи ПИ вариантом МКЭ было получено за $38 + 42 + 125 + 294 + 761 = 1260$ итераций (за 49,85 с). При решении этой задачи традиционным МКЭ на одной последней сетке с нулевым начальным приближением решение было найдено за 7534 итерации (за 4 мин 35 с). При этом с точки зрения затрат машинного времени ПИ вариант МКЭ оказался более, чем в пять раз эффективнее обычного МКЭ. Численные значения компонент НДС отличаются не более 1% от полученных на основе обычного МКЭ.

Распределение главных напряжений σ_1, σ_2 показано на рис. 1, б, в, а линии равных перемещений u, v — на рис. 2. Эти распределения симметричны относительно осей Ox и Oy . Расчетные значения напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ подтверждают выполнение граничных условий в местах приложения внешней нагрузки с погрешностью не более 1,5%.

При рассмотрении задачи о НДС пакета упругих слоев, находящегося под действием нормально распределенной по верхней грани нагрузки, использована методика работы [8]

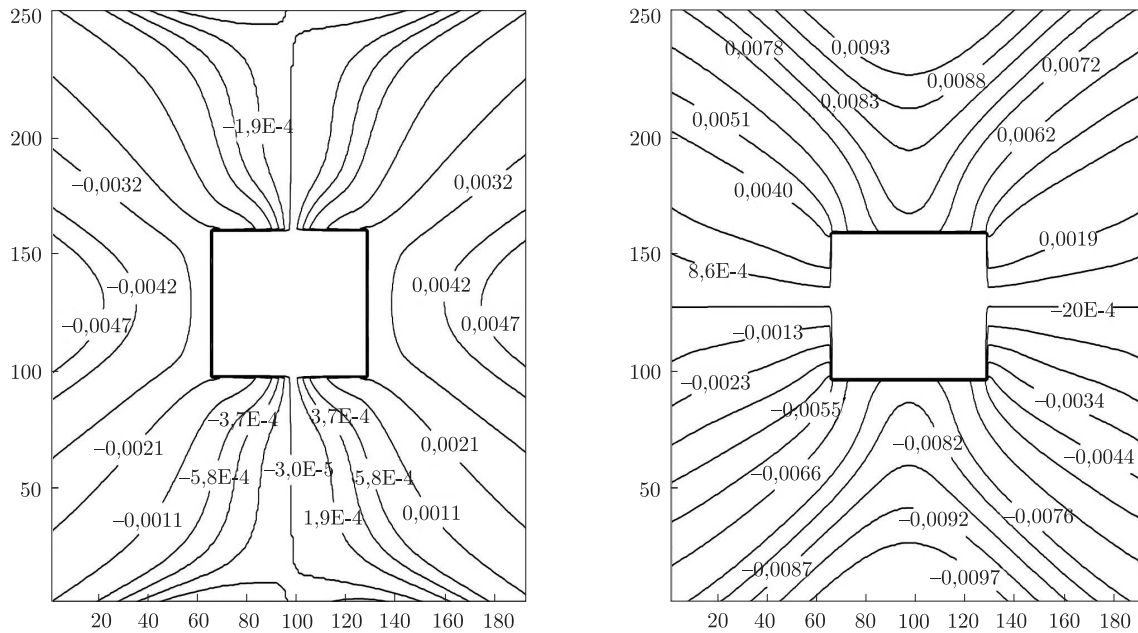


Рис. 2. Линии равных перемещений u, v

и проведено исследование эффективности ПИ варианта МКЭ на последовательности конечно-элементных сеток. Разработан комплекс компьютерных программ на Visual Fortran 6.6, предназначенный для определения полей перемещений, деформаций и напряжений в узлах сетки. Построены графические интерпретации полей перемещений для разных вариантов количества слоев в пакете с различными механическими характеристиками материалов слоев.

Для контактных задач с идеальными односторонними связями [9, 10] ПИ алгоритм, основанный на использовании методов сопряженных градиентов (СГ) и последовательной верхней релаксации (ПВР), требует более, чем в 70 и 2000 раз соответственно меньше затрат машинного времени, чем методы СГ и ПВР, применяемые непосредственно, исходя из нулевого начального приближения, для решения конечномерной задачи, имеющей $264 \cdot 10^3$ неизвестных.

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

- 1) применение ПИ варианта МКЭ к решению плоской задачи теории упругости для пластины с отверстием показало его преимущества по сравнению с традиционным МКЭ с точки зрения уменьшения вычислительных затрат (более, чем в пять раз), существенное влияние на скорость сходимости оказывает параметр релаксации ω (рекомендуемый диапазон его изменения $1,7 \leq \omega \leq 1,85$);
- 2) для многослойного тела экономичность ПИ варианта МКЭ относительно обычного МКЭ по затратам машинного времени составила более, чем четыре раза;
- 3) для контактных задач с идеальными односторонними связями ПИ модификации МКЭ не уступают многосеточному МКЭ по вычислительной эффективности и точности получаемых решений.

Следовательно, применение проекционно-итерационных модификаций МКЭ к решению указанных классов краевых задач теории упругости свидетельствует об их эффективности по сравнению с традиционным МКЭ при незначительном усложнении вычислительного

алгоритма и с достаточной степенью точности, приемлемой для практики, гарантирует получение достоверных результатов. С увеличением размерности решаемых конечномерных задач эффективность проекционно-итерационных модификаций возрастает.

1. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 455 с.
2. *Ладыженская О. А., Уралъцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – Москва: Наука, 1973. – 576 с.
3. *Шайдуров В. В.* Многосеточные методы конечных элементов. – Москва: Мир, 1989. – 288 с.
4. *Балашова С. Д., Плаксий З. Т.* Проекционно-итерационные методы решения задач минимизации с ограничениями // Вычислит. и прикл. математика. – 1988. – **64**. – С. 3–8.
5. *Гарт Э. Л., Борисовская И. В.* Исследование вычислительной эффективности проекционно-итерационных вариантов методов конечных элементов и конечных разностей // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2004. – **2**, вип. 8. – С. 44–51.
6. *Гловинский Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. – Москва: Мир, 1979. – 576 с.
7. *Kluge R.* Ein Projektions-Iterationsverfahren bei Fixpunktproblemen und Gleichungen mit monotonen Operatoren // Monatsber. Dtsch. Acad. Wiss. – 1969. – **11**, No 8–9. – S. 599–609.
8. *Кузьменко В. И.* Трехмерные контактные задачи для многослойного упругопластического пакета // Изв. АН СССР. Механика тв. тела. – 1984. – № 4. – С. 105–112.
9. *Бобылев А. А., Гарт Э. Л.* Применение многосеточного метода конечных элементов к решению контактных задач с идеальными односторонними связями // Техн. механика. – 2003. – № 1. – С. 126–134.
10. *Кравчук А. С., Нейттаньяки П.* Решение контактных задач с использованием метода граничных элементов // Прикл. математика и механика. – 2007. – **71**, вып. 2. – С. 329–339.

Днепропетровский национальный университет

Поступило в редакцию 05.11.2007