

УДК 796.853.45: 623.446.4

*Заневський І.П., Заневська Л.Г.*

## МОДЕЛЬ ТРИСТРИЖНЕВОГО СТАБІЛІЗАТОРА СПОРТИВНОГО ЛУКА

*Львівський державний університет фізичної культури*

## АНОТАЦІЇ

Метою роботи є створення механіко-математичної моделі тристрижневого стабілізатора спортивного лука та аналіз внутрішньої балістики системи «стріла-лук-стабілізатор». Методика дослідження ґрунтується на методах теоретичної механіки, прикладної та комп'ютерної математики.

В результаті комп'ютерного експерименту встановлено, що при максимальному нахилі площини бокових стрижнів відносно центрального розсіюється в 1,4 рази більше енергії, ніж при інсталяції трьох стрижнів стабілізатора в одній площині. При максимально розведених бокових стрижнях спостерігається збільшення розсіювання енергії в  $1,7 \div 2,6$  рази в залежності від того, наскільки нахилені бокові стрижні відносно центрального.

Механіко-математична модель стабілізатора спортивного лука, що розроблена на основі технічної теорії динамічного згину довгих стрижнів, показала свою ефективність і практичну корисність при дослідженні рухів системи у вертикальній площині.

*Ключові слова:* стрільба з лука, стабілізація, внутрішня балістика, моделювання.

Целью работы является создание механико-математической модели трёхстрержневого стабилизатора спортивного лука и анализ внутренней баллистики системы «стрела-лук-стабилизатор». Методика исследования основывается на методах теоретической механики, прикладной и компьютерной математики.

В результате компьютерного эксперимента установлено, что при максимальном наклоне плоскости боковых стержней относительно центрального рассеивается в 1,4 раза больше энергии, чем при установке трёх стержней стабилизатора в одной плоскости. При максимально разведённых боковых стержнях наблюдается увеличение рассеивания энергии в  $1,7 \div 2,6$  раза в зависимости от того, насколько наклонены боковые стержни относительно центрального.

Механико-математическая модель стабилизатора спортивного лука, разработанная на основе технической теории динамического изгиба длинных стержней, показала свою эффективность и практическую полезность при исследовании движений системы в вертикальной плоскости.

*Ключевые слова:* стрельба из лука, стабилизация, внутренняя баллистика, моделирование.

The aim of the research is to create a mechanical and mathematical model of the three-beam stabiliser of the sport bow and analyse internal ballistics of the arrow, bow, and stabiliser system. The methods of research is based on the methods of theoretical mechanics, applied and computer mathematics.

The results of the computational experiment show that energy dissipation when the lateral beams are situated with a maximum incline to the central beam is 1.4 times bigger than all the three beams are situated in the same plane. When the lateral beams are situated with a maximum angle, energy dissipation is  $1.7 \div 2.6$  times bigger in function of the angle of lateral beams plane inclines to the central beam.

Mechanical and mathematical model of the sport bow stabiliser developed on the base of the technical theory of long beams bending show its efficiency and practical profit for study of motion of the system in the vertical plane.

*Keywords:* archery, stability, internal ballistics, modelling, computer simulation.

*Проблема.* Різка віддача руків'я після випуску тятиви, а також вібрації після виходу стріли з гнізда тятиви мають негативний вплив на спортивний результат у стрільбі з лука. Інтенсивні динамічні процеси під час спільного руху стріли з тятивою призводять до нестабільного упору руки в руків'я лука, що призводить до збільшення розсіяння стріл. Окрім того, неприємні відчуття віддачі й вібрації сприяють формуванню у стрільця умовної реакції протидії безпосередньо перед випуском тятиви. Це також негативно впливає на стабільність рухів при виконанні пострілу [14].

З метою пом'якшити віддачу й вібрації в сучасних спортивних луках застосовують стабілізатори. Стабілізатор – це система стрижнів, вантажів і демпферів, закріплених до руківки лука. Застосування стабілізатора підвищує рівновагу лука під час прицілювання і спільного руху стріли з тятивою. Стабілізатор акумулює на себе частину кінетичної енергії лука, зменшуючи віддачу руків'я й вібрації після вильоту стріли [1].

Підбір стабілізатора, налаштування його параметрів відповідно до параметрів лука й стрільця в умовах спортивної практики виконується методом спроб і помилок [10]. Розробка науково обґрунтованої методики оптимізації параметрів стабілізатора потребує створення його механіко-математичної моделі, а також аналізу внутрішньої балістики цієї системи.

*Аналіз останніх досліджень і публікацій.* Для створення механіко-математичної моделі тристрижневого стабілізатора спортивного лука та аналізу внутрішньої балістики системи «стріла-лук-стабілізатор» існує достатньо глибоке наукове підґрунтя. Розроблено модель плеча сучасного спортивного лука й експериментально-аналітичний метод для визначення її параметрів [11]. Поставлено й розв'язано задачі статички і динаміки стосовно механіки системи лук-стріла у вертикальній площині [12]. Виявлено коливний характер спільного руху стріли з луком. Отримано практичні рекомендації щодо забезпечення мінімальних величин кута атаки й поступального руху стріли при виході з лука [5]. Запропоновано аналітичну модель сучасного спортивного лука з

урахуванням асиметрії системи “стрілець-лук” у вертикальній площині. На базі цієї моделі розроблено розрахунковий метод узгодження параметрів системи, що дозволяє оптимізувати процес налаштування лука у вертикальній площині за умови нульового кута атаки стріли [9].

Розглянуто вібраційні процеси та втрату динамічної стійкості в системі “стрілець-лук-стріла”, нейтральне положення якої визначалося як розв'язок задачі статичної рівноваги для моменту випуску тятиви. Визначено власні частоти і форми коливань та динамічної нестійкості. Розрахунки проведено з використанням загальнодоступних пакетів прикладних програм на персональному комп'ютері [6, 7].

Розроблено науковий підхід до проблеми стабілізації лука у вертикальній площині, який показав свою придатність для розв'язання інженерних задач стосовно спортивних луків, а також для практики лучного спорту. Модель стабілізатора і метод аналізу його роботи адаптовано для використання у системах комп'ютерної математики. Кількісні результати комп'ютерного моделювання представлено у таблицях і графіках, що робить їх доступними для фахівців фізичного виховання і спорту, спортсменів і тренерів [4, 8, 13].

Однак у доступних для широкої спортивної громадськості відкритих публікаціях нами не виявлено даних стосовно аналізу роботи тристрижневого стабілізатора спортивного лука.

*Метою роботи* є створення механіко-математичної моделі тристрижневого стабілізатора спортивного лука та аналіз внутрішньої балістики системи «стріла-лук-стабілізатор».

*Методика* дослідження ґрунтується на методах теоретичної механіки та прикладної математики (модель згину довгих стрижнів Ейлера-Бернуллі, рівняння Лагранжа другого роду; задача Коші; метод Рунге-Кутта), комп'ютерної математики (Mathematica).

Для апробації механіко-математичної моделі тристрижневого стабілізатора спортивного лука та аналізу внутрішньої балістики системи «стріла-лук-стабілізатор» застосовано обчислювальний експеримент.

*Основні результати.* Сучасний спортивний лук оснащено, як правило, тристрижньовим стабілізатором, який встановлюється назовні руків'я (рис. 1). Центральний і два бокових стрижні кріпляться до трійника, причому центральний завжди в тому самому положенні, а бокові – з можливістю зміни свого положення відносно точки закріплення. Отож кожний боковий шарнір утворює з трійником шарнір третього класу і він визначає положення бокового стрижня відносно центрального, яке задається двома кутами. Загалом стрижні стабілізатора можуть мати змінну по довжині величину поперечного перетину. На консольних торцях стрижнів встановлюють вантажі й демпфери. Трійник закріплено до руківки через короткий стрижень-подовжувач (рис. 2).

Кожен з трьох стрижнів стабілізатора будемо моделювати пружним стрижнем в рамках теорії Ейлера-Бернуллі. Оскільки трійник і подовжуючий стрижень мають сумірні розміри і виготовляються з жорстких матеріалів, їхніми деформаціями можна нехтувати, вважаючи, що ці деталі утворюють одне недеформівне тіло разом з руківкою. Оскільки сучасна техніка виконання пострілу з лука передбачає нерухоме положення руки, яка тримає лук, можна вважати точку прикладення вектора сили до руківки (т.  $H$ ) нерухомою. Розмістимо у вертикальній площині симетрії лука приєднану до руківки прямокутну систему координат з початком у т.  $H$ . Вісь  $Hx$  спрямовано вгору перпендикулярно до поздовжньої осі центрального стрижня стабілізатора, тобто паралельно до поздовжньої осі руківки. Вісь  $Hu$  спрямовано у напрямку до лука. Розглядаємо рух стабілізатора відносно нерухомої системи координат  $\xi O\eta$ , яку також розміщено у вертикальній площині симетрії лука. Оскільки переміщення лука разом зі стабілізатором за величиною суттєво менші за розміри стрижнів, можна прийняти лінійну модель для дослідження їхніх переміщень.

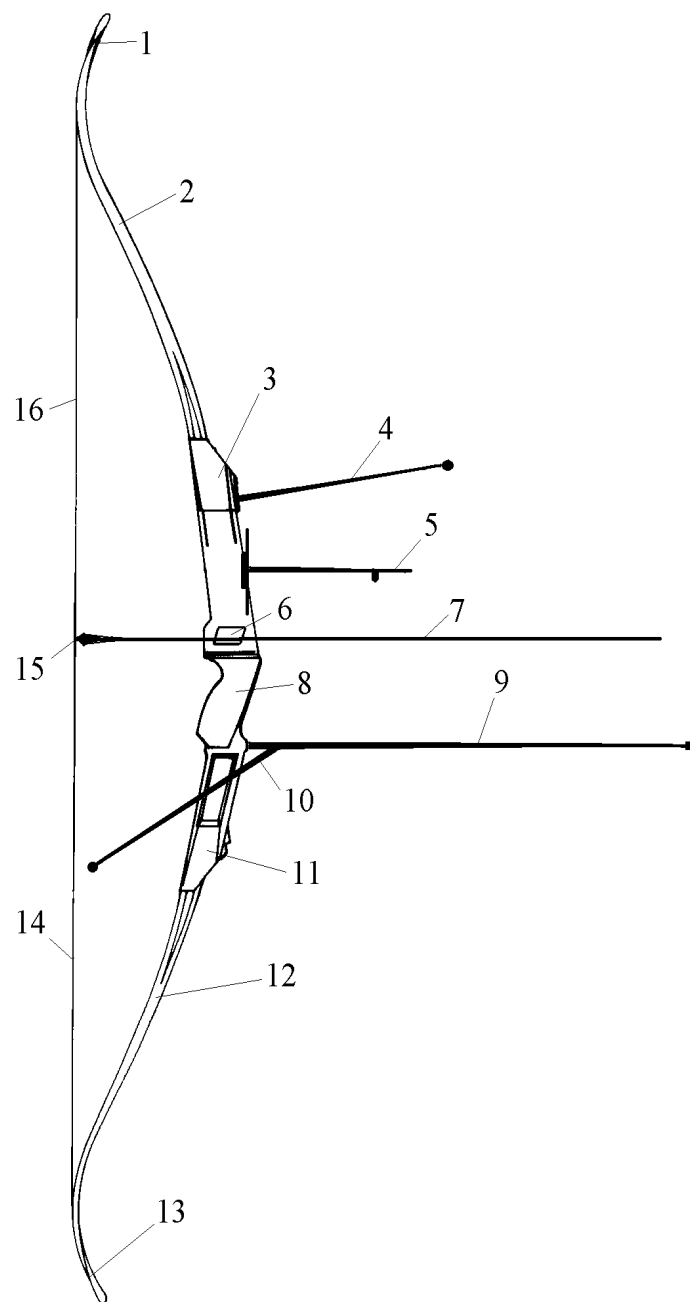


Рис 1. Схема сучасного спортивного лука за стандартом FITA:

1, 13 місця закріплення тятиви;  
 2, 12 – плечі; 3, 11 – механізми встановлення плечей в руківку лука; 4, 9, 10 – стабілізатор; 5 – приціл; 6 – поличка для стріли; 7 – стріла; 8 – руківка; 14, 16 – верхня та нижня тятиви; 15 – гніздо тятиви.

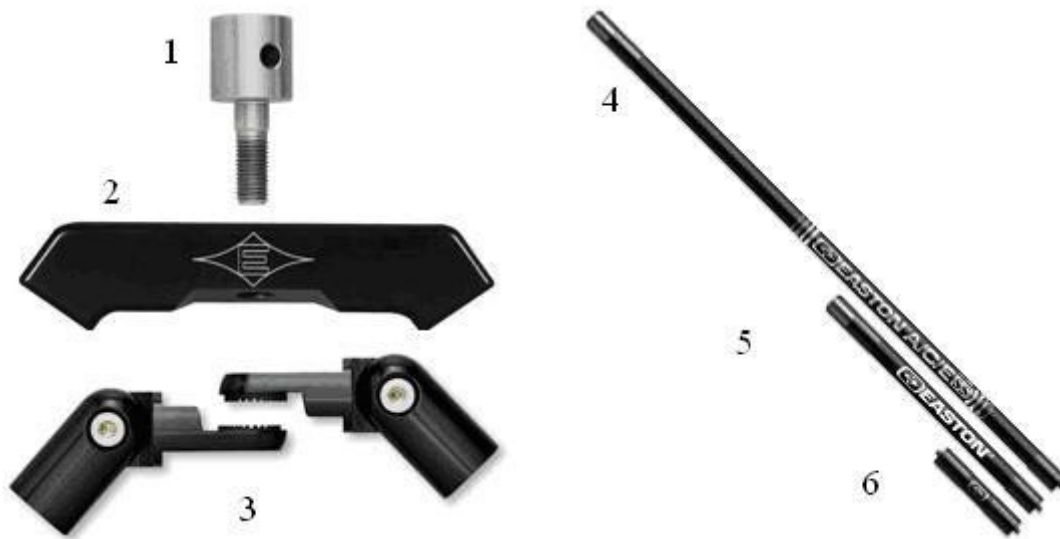


Рис. 2. Комплект деталей стабілізатора сучасного спортивного лука (Easton X10™ Stabilizer System [1]):

- 1 – болт кріплення;
- 2 – трійник;
- 3 – деталі кріплення бокових стрижнів;
- 4 – центральний стрижень;
- 5 – боковий стрижень;
- 6 – подовжувач кріплення трійника до руківки лука.

*Модель центрального стрижня.* Рух центрального стрижня стабілізатора відбувається у вертикальній площині симетрії лука. Представимо переміщення точок осі центрального стабілізатора як суму переміщень у двох взаємно перпендикулярних напрямках – поздовжньому  $\xi_c$  й поперечному  $\eta_c$ , друге з яких, своєю чергою, запишемо як суму лінійних переміщень, зумовлених поворотом руківки і згином стрижня (рис. 3)

$$\xi_c = x_V \kappa ; \eta_c = (z_n - y_V) \kappa + q_c \lambda , \quad (1)$$

де  $x_V, y_V$  – координати перетину осей стрижня й трійника;  $z_c$  – поздовжня координата стрижня;  $q_c$  – відхилення вільного кінця стрижня, зумовлене його згином;  $\lambda$  – форма згину осі стрижня. Як показано в попередніми дослідженнями, для аналізу роботи стабілізатора лука можна прийняти форму осі горизонтального стрижня, навантаженого на вільному кінці зосередженою вертикальною силою [13]:

$$\chi = \frac{I}{2} \left( \frac{z_c}{l_c} \right)^2 \left( 3 - \frac{z_c}{l_c} \right), \quad (2)$$

де  $l_c$  – довжина стрижня. Така форма задовольняє двом геометричним умовам консольного закріплення стрижня, а саме, відсутності переміщення й повороту поперечного перетину стрижня у місці його закріплення.

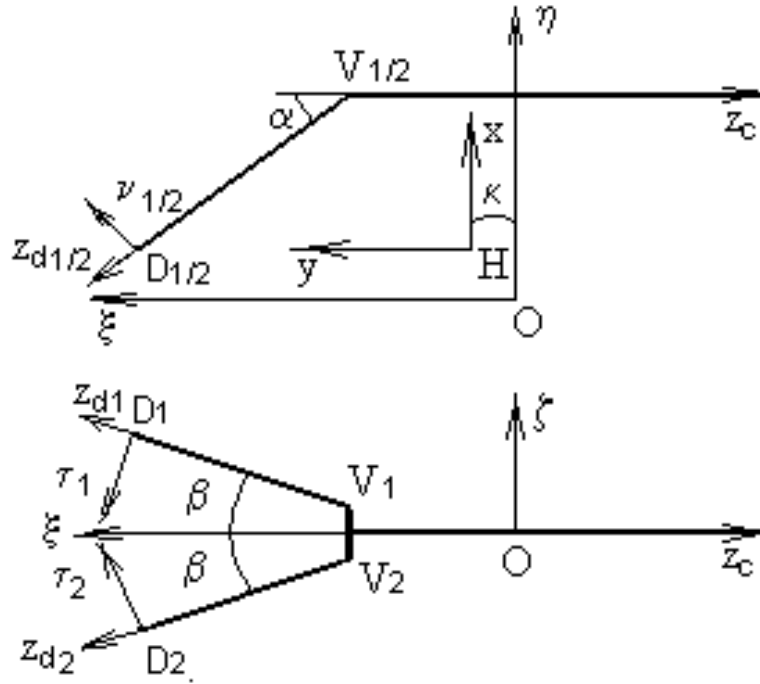


Рис. 3. Розрахункова схема тристрижневого стабілізатора: вгорі – проекція на вертикальну площину, внизу на площину, перпендикулярну до осі  $O\eta$ .

Кінетична енергія стрижня визначається виразом:

$$T_c = \frac{I}{2} \left[ \int_0^{l_c} \rho_c (\dot{\xi}_c^2 + \dot{\eta}_c^2) dz_c + M_c (\dot{\xi}_c^2 + \dot{\eta}_c^2)_{z_c=l_c} \right] \quad (3),$$

де  $\rho_c$  – погонна маса стрижня;  $M_c$  – маса вантажу на вільному кінці стрижня;

$(\dot{\cdot}) \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)$  – крапкою позначено похідну по часу.

Підставляючи в (3) вирази (1) і (2), після інтегрування й проміжних перетворень (див. додаток) отримаємо:

$$T_c = \frac{1}{2} m_c \left[ \begin{aligned} & \frac{1}{4} (9J_4 - 6J_5 + J_6) \dot{q}_c^2 + \\ & (J_2 l_c^2 + x_V^2 + y_V^2 - 2y_V J_1 l_c) \dot{\kappa}^2 + \\ & [(3J_3 - J_4) l_c - (3J_2 - J_3) y_V] \dot{q}_c \dot{\kappa} \end{aligned} \right] + \frac{1}{2} M_c \left\{ \begin{aligned} & [x_V^2 + (l_c - y_V)^2] \dot{\kappa}^2 \\ & + 2(l_c - y_V) \dot{\kappa} \dot{q}_c + \dot{q}_c^2 \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

де  $m_c = \int_0^{l_c} \rho_c dz_c$  – маса стрижня;  $J_i = \frac{\int_0^{l_c} \rho_c z_c^i dz_c}{m_c l_c^i}$  (додаток 1). У випадку стрижня

циліндричної форми  $J_i = \frac{1}{i+1}$ .

Положення бокового стрижня визначається кутом  $\alpha$ , який утворює поздовжня вісь стрижня з площиною, в якій лежить поздовжня вісь центрального стрижня і яка є перпендикулярною до площини симетрії лука, а також кутом  $\beta$ , який утворює поздовжня вісь стрижня з площиною симетрії лука. На схемі кут  $\alpha$  показано для випадку паралельного розміщення бокових стабілізаторів ( $\beta = 0$ ). Кутове переміщення руківки разом зі стабілізатором позначено кутом  $\kappa$ , який відраховується від осі  $O\eta$  проти годинникової стрілки.

Згинні переміщення точок осі бокового стабілізатора розкладемо на дві частини: нормальну складову – вздовж перпендикуляра до осі стрижня вверх у вертикальній площині  $D\nu$  і тангенціальну складову – перпендикулярно до згаданої площини в середину стабілізатора  $D\tau$ . Уздовж прямих осей кожного з бокових стрижнів спрямовано поздовжні осі  $V_1 z_1$  і  $V_2 z_2$ . Просторова геометрія розміщення бокових стрижнів передбачає просторовий характер їхньої кінематики. Розглядаємо рухи стрижнів відносно ортогональної системи координат  $O\xi\eta\zeta$ . Оскільки бокові стрижні розміщено у дзеркальній симетрії відносно вертикальної площини симетрії лука, переміщення точок осей цих стрижнів також будуть дзеркально симетричними відносно цієї площини. Запишемо їх такими виразами (див. рис. 3):

$$\xi_d = (x_V - z_d \sin \alpha) \kappa + (q_v \sin \alpha \cos \beta + q_\tau \sin \beta) \chi ;$$

$$\eta_d = -(y_V + z_d \cos \alpha \cos \beta) \kappa + q_v \chi \cos \alpha ; \zeta_d = \pm (q_v \sin \alpha \sin \beta - q_\tau \cos \beta) \chi , \quad (5)$$

де  $q_v, q_\tau$  – відхилення вільного кінця стрижня, зумовлене його згином у напрямках осей відповідно  $v$  і  $\tau$ ;  $\chi$  – форма згину осі стрижнів (2). Плюс у подвійному знаку  $\pm$  у третьому виразі (5) для латеральної складової переміщення ( $\zeta_d$ ) стосується першого бокового стрижня, а мінус – другого.

Кінетична енергія двох бокових стрижнів разом визначається виразом:

$$T_d = \int_0^{l_d} \rho_d (\dot{\xi}_d^2 + \dot{\eta}_d^2 + \dot{\zeta}_d^2) dz_d + M_d (\dot{\xi}_d^2 + \dot{\eta}_d^2 + \dot{\zeta}_d^2)_{z_d=l_d}, \quad (6)$$

де  $l_d$  – довжина стрижня;  $\rho_d$  – погонна маса кожного зі стрижнів;  $M_c$  – маса вантажу на вільному кінці кожного стрижня.

Підставляючи в (6) вирази (5) і (2), після інтегрування й проміжних перетворень (див. додаток) отримаємо:

$$T_d = m_d \left( (9J_4 - 6J_5 + J_6) (\dot{q}_v^2 + \dot{q}_\tau^2) + \left[ \begin{aligned} &x_V^2 + y_V^2 + \\ &2J_1 l_d (y_V \cos \alpha \cos \beta - x_V \sin \alpha) \\ &+ J_2 l_d^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta) \end{aligned} \right] \kappa^2 \right. \\ \left. + 2 \left\{ \begin{aligned} &[(3J_2 - J_3)(x_V \sin \alpha \cos \beta - y_V \cos \alpha) - (3J_3 - J_4) l_d \cos \beta] \kappa \dot{q}_v \\ &+ [(3J_2 - J_3)x_V - (3J_3 - J_4) l_d \sin \alpha] \kappa \dot{q}_\tau \sin \beta \end{aligned} \right\} \right) \quad (7)$$

$$+ M_d \left\{ \begin{aligned} &[(x_V - l_d \sin \alpha)^2 + (y_V + l_d \cos \alpha \cos \beta)^2] \kappa^2 + \dot{q}_v^2 + \dot{q}_\tau^2 \\ &+ 2[(x_V - l_d \sin \alpha) \sin \alpha \cos \beta - (y_V + l_d \cos \alpha \cos \beta) \cos \alpha] \kappa \dot{q}_v \\ &+ 2[(x_V - l_d \sin \alpha) \sin \beta] \kappa \dot{q}_\tau \end{aligned} \right\}$$

Оскільки подовжуючий стрижень, що кріпиться до руківки, разом із трійником, до якого закріплено стрижні стабілізатора, можна вважати недеформівним тілом, яке має можливість обертатися відносно т.  $H$ , його кінетичну енергію можна записати таким виразом:

$$T_V = \frac{I}{2} m_V (\dot{\xi}_V^2 + \dot{\eta}_V^2) + \frac{I}{2} I_V \kappa^2 ,$$

де  $m_V$  і  $I_V$  – відповідно маса і момент інерції мас трійника відносно перпендикулярної до площини симетрії лука осі, яка проходить через центр маси трійника. Переміщення центра мас визначаються виразами:

$\xi_V = x_{VK}$  ;  $\eta_V = -y_{VK}$  . Підставляючи ці вирази у попередній вираз, отримуємо вираз кінетичної енергії трійника:

$$T_V = \frac{I}{2} \left[ m_V (x_V^2 + y_V^2) + I_V \right] \dot{\kappa}^2 . \quad (8)$$

Потенціальну енергію центрального стрижня в рамках прийнятої моделі інженерної теорії згину тонких стрижнів записуємо виразом:

$$P_c = \frac{I}{2} q_n^2 \int_0^{lc} \varepsilon_c \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial z_c^2} \right)^2 dz_c ,$$

де  $\varepsilon_c$  – погонна жорсткість стрижня. Підставляючи у цей вираз форму згину (2), отримуємо вираз потенціальної енергії:

$$P_c = \frac{9q_c^2}{2l_c^4} (1 - 2J_{\varepsilon 1} + J_{\varepsilon 2}) \int_0^{lc} \varepsilon_c dz_c , \quad (9)$$

де  $J_{\varepsilon i} = \frac{\int_0^{lc} \varepsilon_c z^i dz_c}{l_c^i \int_0^{lc} \varepsilon_c dz_c}$  – безрозмірні характеристики жорсткості стрижня на згин.

З другого боку, оскільки форму згину стрижня прийнято із задачі згину горизонтального консольно закріпленого стрижня з вантажем на вільному кінці, потенціальну енергію можна представити у формі:

$$P_c = \frac{I}{2} c_c q_n^2 , \quad (10)$$

де  $c_c$  – відповідна приведена до вільного кінця жорсткість стрижня, яку з врахуванням виразу (9) можна представити виразом:

$$c_c = \frac{9}{l_c^4} (1 - 2J_{\varepsilon 1} + J_{\varepsilon 2}) \int_0^{lc} \varepsilon_c dz_c . \quad (11)$$

Подібним чином запишемо вирази потенціальної енергії бокових стрижнів стабілізатора:

$$P_d = \left( q_v^2 + q_\tau^2 \right) \Big|_0^{l_d} \varepsilon_d \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial z_d^2} \right)^2 dz_d ; P_d = c_d \left( q_v^2 + q_\tau^2 \right),$$

з яких отримуємо вираз для жорсткості одного стрижня, приведеної до його консольного краю:

$$c_d = \frac{9}{l_c^4} \left( 1 - 2J_{\varepsilon 1} + J_{\varepsilon 2} \right) \Big|_0^{l_d} \varepsilon_d dz_d . \quad (12)$$

Абсолютна величина відхилення вільного кінця бокового стрижня внаслідок згинних деформацій визначається виразом:

$$q_d = \sqrt{q_v^2 + q_\tau^2} , \quad (13)$$

а напрямок – кутом  $\gamma = \arctg \frac{q_\tau}{q_v}$ .

Здатність стабілізатора до **розсіяння енергії** враховано дисипативною функцією Релея  $\Phi$ , яка представлена виразом:

$$\Phi = \frac{I}{2} \left[ k_c \dot{q}_c^2 + 2k_d \left( \dot{q}_v^2 + \dot{q}_\tau^2 \right) \right], \quad (14)$$

де  $k_c, k_d$  – дисипативні коефіцієнти відповідно центрального й бокового стрижнів стабілізатора.

Вирази кінетичної та потенціальної енергії самого лука (без стабілізатора) й стріли візьмемо з попередньої роботи [12]. Розв'язуючи задачу динаміки, ми не враховуємо дії гравітаційних сил на переміщення лука, вважаючи, що вони врівноважені рукою стрільця. Натомість гравітаційні сили, що діють на стрілу, є сумірними за величиною з інерційними силами, тому їхнім впливом на зміну положення стріли нехтувати не слід.

Розглянемо найбільш розповсюджені у спортивній стрільбі з лука стабілізатори зі стрижнями циліндричної форми. Підставляючи вирази (4, 7, 8, 10, 14), а також відповідні вирази з [12] в рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = F_i, \quad (15)$$

отримуємо систему диференціальних рівнянь другого порядку відносно узагальнених координат  $q_i \equiv \kappa, \theta_U, \theta_L, q_c, q_v, q_\tau, \xi_A, \eta_A, \psi$  :

$$\left\{ \begin{aligned} & I_H + I_U + I_L + m_U h_U^2 + m_L h_L^2 + I_V + m_V (x_V^2 + y_V^2) + m_c \left( \frac{1}{3} l_c^2 + x_V^2 + y_V^2 - y_V l_c \right) \\ & + 2m_d \left[ x_V^2 + y_V^2 + (y_V \cos \alpha \cos \beta - x_V \sin \alpha) l_d + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta) \frac{l_d^2}{3} \right] \\ & + M_c [x_V^2 + (l_c - y_V)^2] + 2M_d [(x_V - l_d \sin \alpha)^2 + (y_V + l_d \cos \alpha \cos \beta)^2] \end{aligned} \right\} \ddot{\kappa} \\ + m_U r_U h_U [b_1 (\ddot{\theta}_U + 2\ddot{\kappa}) - b_2 (\ddot{\theta}_U + \ddot{\kappa})^2] - m_L r_L h_L [b_3 (\ddot{\theta}_L - 2\ddot{\kappa}) - b_4 (\ddot{\theta}_L - \ddot{\kappa})^2] \\ + I_U \ddot{\theta}_U - I_L \ddot{\theta}_L + M_c (l_c - y_V) \ddot{q}_c + 2M_d [(x_V - l_d \sin \alpha) \sin \beta] \ddot{q}_\tau \\ + 2M_d [(x_V - l_d \sin \alpha) \sin \alpha \cos \beta - (y_V + l_d \cos \alpha \cos \beta) \cos \alpha] \ddot{q}_v \\ + 2m_d \left\{ \left[ \frac{3}{8} (x_V \sin \alpha \cos \beta - y_V \cos \alpha) - \frac{11}{40} l_d \cos \beta \right] \ddot{q}_v + \left( \frac{3}{8} x_V - \frac{11}{40} l_d \sin \alpha \right) \sin \beta \ddot{q}_\tau \right\} \\ + m_c \left( \frac{11}{40} l_c - \frac{3}{8} y_V \right) \ddot{q}_c + e_U [S_2 (b_1 l_U + h_U) - S_1 b_2 l_U] - e_L [S_4 (b_3 l_L + h_L) + S_3 b_4 l_L] = 0;$$

$$I_U (\ddot{\theta}_U + \ddot{\kappa}) + m_U r_U h_U b_1 \ddot{\kappa} + c_U (\theta_U + \varphi_U) + e_U l_U (S_{U\xi} b_1 - S_{U\eta} b_2) = 0;$$

$$I_L (\ddot{\theta}_L - \ddot{\kappa}) - m_L r_L h_L b_3 \ddot{\kappa} + c_L (\theta_L + \varphi_L) + e_L l_L (S_{L\xi} b_3 + S_{L\eta} b_4) = 0;$$

$$m_c \left[ \left( \frac{11}{40} l_c - \frac{3}{8} y_V \right) \ddot{\kappa} + \frac{33}{140} \ddot{q}_c \right] + M_c (l_c - y_V) \ddot{\kappa} + k_c \dot{q}_c + c_c q_c = 0;$$

$$m_d \left\{ \left[ \frac{3}{8} (x_V \sin \alpha \cos \beta - y_V \cos \alpha) - \frac{11}{40} l_d \cos \beta \right] \ddot{\kappa} + \frac{33}{140} \ddot{q}_v \right\} \quad (16)$$

$$+ M_d [(x_V - l_d \sin \alpha) \sin \alpha \cos \beta - (y_V + l_d \cos \alpha \cos \beta) \cos \alpha] \ddot{\kappa} + k_d \dot{q}_v + c_d q_v = 0;$$

$$m_d \left[ \left( \frac{3}{8} x_V - \frac{11}{40} l_d \sin \alpha \right) \ddot{\kappa} \sin \beta + \frac{33}{140} \ddot{q}_\tau \right]$$

$$+ M_d [(x_V - l_d \sin \alpha) \sin \beta] \ddot{\kappa} + k_d \dot{q}_\tau + c_d q_\tau = 0;$$

$$(m_A + m_a)\ddot{\xi}_A - e_U S_{U\xi} - e_L S_{L\xi} = 0;$$

$$(m_A + m_a)\ddot{\eta}_A + m_a r_A \ddot{\psi} + m_a g - e_U S_{U\eta} - e_L S_{L\eta} = 0;$$

$$I_A \ddot{\psi} + m_a r_A (\ddot{\eta}_A + \ddot{\xi}_A \psi + g) = 0,$$

$$\text{де } S_{U\eta} = \eta_H + h_U + l_U b_1 - \eta_A; S_{L\eta} = \eta_H - h_L + l_L b_3 - \eta_A;$$

$$S_{U\xi} = \xi_H + h_U \kappa + l_U b_2 - \xi_A; S_{L\xi} = \xi_H - h_L \kappa + l_L b_4 - \xi_A;$$

$$e_U = f \frac{S_U - S_U^*}{S_U^*}; e_L = f \frac{S_L - S_L^*}{S_L^*}; s_U = \sqrt{S_{U\xi}^2 + S_{U\eta}^2}; s_L = \sqrt{S_{L\xi}^2 + S_{L\eta}^2};$$

$$b_1 = \cos(\theta_U + \kappa); b_2 = \sin(\theta_U + \kappa); b_3 = \cos(\theta_L - \kappa); b_4 = \sin(\theta_L - \kappa);$$

$l_U, l_L$  - довжини плечей;  $s_U, s_L, s_U^*, s_L^*$  - довжини гілок тятиви відповідно у

розтягнутому та не розтягнутому стані;  $h_U, h_L$  - розміри руківки, що

визначають положення т.  $O$ ;  $c_U, c_L$  - жорсткість плечей;  $l_a$  - довжина стріли

(вона визначає величину розтягу лука);  $f$  - погонна жорсткість тятиви.

$m_A = \frac{1}{3} m_s$  - приведена до гнізда маса тятиви;  $m_s$  - маса тятиви;  $m_a$  - маса

стріли;  $\mu(z)$  - погонна маса древка стріли;  $z$  - пов'язана зі стрілою поздовжня

координата;  $\psi$  - кут позиції стріли;  $I_H$  - момент інерції руківки відносно точки

упору;  $m_U, m_L$  - маси плечей з доданком до кожної з них третини маси тятиви;

$\kappa$  - кутове переміщення руківки;  $I_U, I_L$  - моменти інерції плечей відносно осей

на руків'ї, обчисленні з врахуванням відповідних приведених мас тятиви

( $\frac{1}{3} m_s$ );  $r_U, r_L$  - відстані центрів мас плечей від кінців руківки;  $g$  - прискорення

вільного падіння. Решта позначень зрозумілі зі схеми (див. рис. 3.3). Тут і далі

позначення з індексами «U» та «L» стосуються відповідно верхнього та нижнього плечей.

Початкові умови задачі мають вигляд:

$$\begin{aligned} t = 0; \xi_A = \xi_{A0}; \eta_A = \eta_{A0}; \theta_U = \theta_{U0}; \theta_L = \theta_{L0}; \kappa = 0; \psi = \psi_0; q_c = 0; q_v = 0; \\ q_\tau = 0; \dot{\xi}_A = 0; \dot{\eta}_A = 0; \dot{\theta}_U = 0; \dot{\theta}_L = 0; \dot{\kappa} = 0; \dot{\psi} = 0; \dot{q}_c = 0; \dot{q}_v = 0; \dot{q}_\tau = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

де константи  $\theta_{U0}$ ,  $\theta_{L0}$ ,  $\xi_{A0}$ ,  $\eta_{A0}$ ,  $\psi_0$  є розв'язками задачі статики [7]. Нульові значення похідних у початкових умовах відповідають прийнятій моделі техніки виконання пострілу зі спортивного лука (затамоване дихання й нерухома поза). Оскільки за правилами проведення змагань вітрові та інші зовнішні сили, що діють на лук і стабілізатор не можуть досягати суттєвих величин, узагальнені сили в рівняннях (15), що описують стан системи у вертикальній площині, слід вважати нульовими:  $F_i = 0$ .

Система рівнянь (16) з початковими умовами (17) являє собою задачу Коші для звичайних нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Оскільки отримати розв'язки такої задачі у замкненій формі неможливо, застосуємо метод Рунге-Кутта. Скористаємося програмною реалізацією цього методу 'NDSolve' (Method Explicit Runge-Kutta) з пакету системи комп'ютерної математики Mathematica ([www.wolfram.com](http://www.wolfram.com)). Текст відповідної програми подано у додатку 2.

Ця математична модель описує динаміку системи стрілець-лук-стріла у вертикальній площині (строго кажучи, мова йде про спільний рух елементів системи у проекції на вертикальну площину). Насправді система знаходиться у просторовому русі, однак, переміщення у латеральній площині є на два порядки меншими від переміщень у вертикальній площині. Відповідні енергетичні потоки мають між собою подібне співвідношення [5].

Розглянемо для прикладу популярний серед лучників тристрижньовий стабілізатор Easton X10™ (табл. 1).

Таблиця 1

Параметри стабілізатора Easton X10™

№	Деталі стабілізатора	Довжина, дюйм*	Вага, унція*
1	Центральний стрижень	30	6,8
2	Боковий стрижень	10	2,3
3	Трійник	5	4,2
4	Подовжувач	4	1,5
5	Вантаж	1,4	1,5

Сучасний спортивний лук (WIN&WIN Recurve Bow [3]) відповідає стандарту FITA та має середні за величиною параметри. Лук складається з руківки типу Winact Riser (25" = 635 мм) та довгих плечей (70" = 1778 мм). Маркування основних розмірів сучасних спортивних луків виконують у традиційних одиницях – дюймах, які у маркуванні луків мають позначення ("). Сила лука  $F=178$  Н. Довжина руківки складає  $h^*=635$  мм (рис. 3), а загальна довжина лука, яка вимірюється між канавками для підв'язування тятиви на кінцях плечей, складає 1778 мм. Стандартною мірою асиметрії лука у вертикальній площині є „тиллер”, величина якого у досліджуваному прикладі складає  $\Delta = 6$  мм. Циліндрична алюмінієва стріла марки No 2414 - 30" [2] має наконечник, маса якого відповідає положенню загального центра мас стріли на відстані , що складає 15% від загальної довжини стріли, від її геометричного центра у бік наконечника.

Розрахункові параметри лука:  $l_U = l_L = 531$  мм;  $m_U = 106$  г;  $m_L = 107$  г;  $I_U = 68,1$  кгсм<sup>2</sup>;  $I_L = 68,3$  кгсм<sup>2</sup>;  $r_U = 227$  мм;  $r_L = 228$  мм;  $c_U = c_L = 69,1$  Нм;  $\varphi_U = 0,6047$ ;  $\varphi_L = 0,6076$   $h_U = h_L = 342$  мм;  $m_H = 2,13$  кг;  $I_H = 2128$  кгсм<sup>2</sup>;  $s_U^* = 780$  мм;  $s_L^* = 840$  мм;  $f = 255$  Н/см;  $m_s = 7$  г;  $\xi_{A0} = 758$  мм.

Параметри стріли є такими:  $l_a = 783$  мм;  $m_a = 22,4$  г;  $I_A = 73,6$  кгсм<sup>2</sup>;  $r_A = 510$  мм.

Параметри стабілізатора (див. рис. 2 і табл. 1):  $m_c = 0,193$  кг;  $m_d = 0,065$  кг;  $m_v = 0,119$  кг;  $M_c = 0,043$  кг;  $M_d = 0,043$  кг;  $c_c = 618$  Н/м;  $c_d = 6970$  Н/м;  $l_c = 760$  мм;  $l_d = 254$  мм;  $k_c = 11,2$  кг/с;  $k_d = 3,1$  кг/с.

Початкові умови (17):  $\eta_{A0} = 42,6$  мм;  $\theta_{U0} = 0,7655$ ;  $\theta_{L0} = 0,7942$ . Решта результатів розв'язання цієї задачі, які необхідні для аналізу динаміки системи, є такими:  $s_U = 786$  мм;  $s_L = 846$  мм;  $\gamma_U = 0,5189$ ;  $\gamma_L = 0,4641$ ;  $F_U = 186$  Н;  $F_L = 192$  Н.

За час спільного руху лука зі стрілою центральний стрижень знаходиться у динамічному згині із напрямком вгору у вертикальній площині симетрії лука, виконуючи приблизно одну п'яту повного циклу коливань. Максимальне відхилення вільного кінця досягає 1,6 мм (рис. 4).

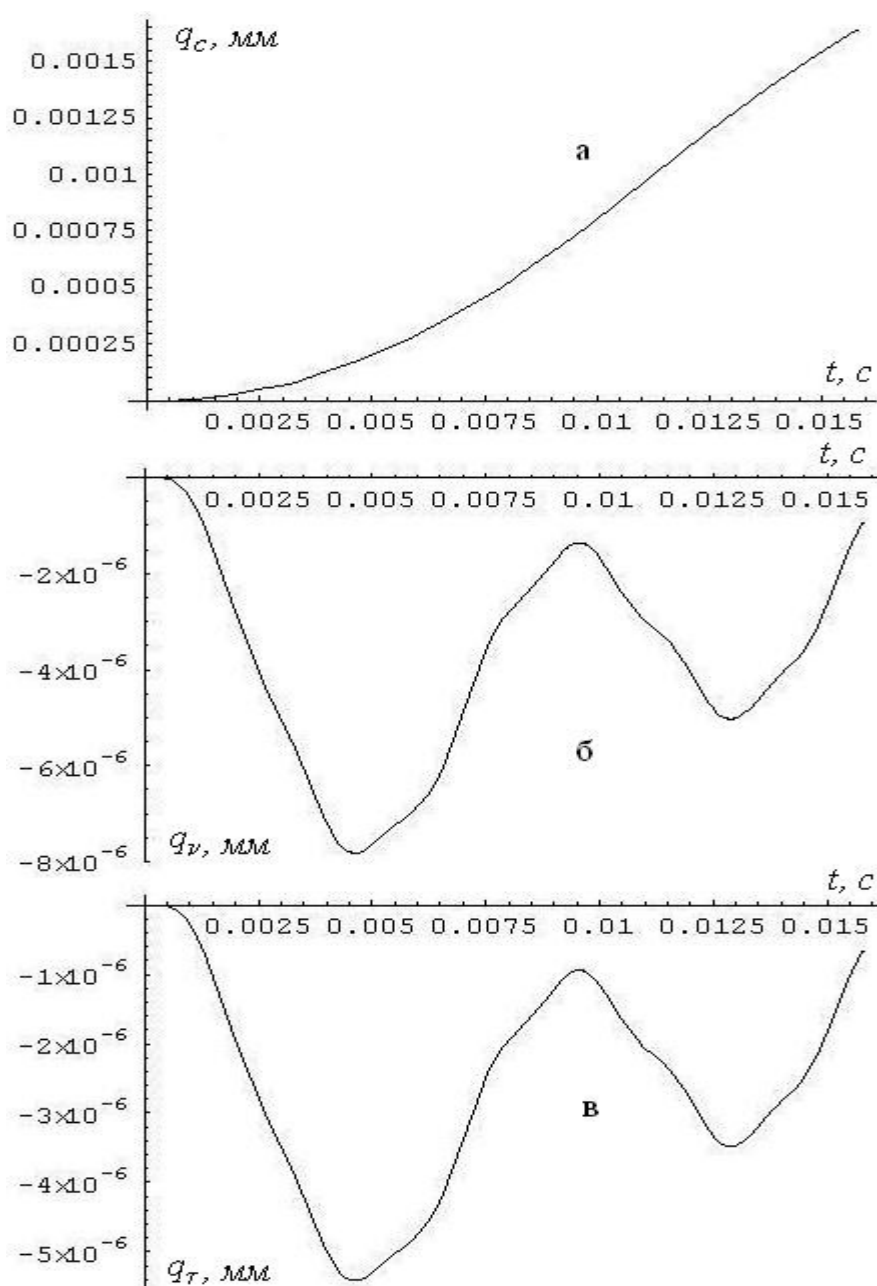


Рис. 4. Відхилення вільних кінців стрижнів стабілізатора внаслідок згину при кутах інсталяції  $\alpha = 0,294$  і  $\beta = 0,611$ : а – центрального стрижня; б і с – бокового стрижня відповідно в нормальному і тангенціальному напрямках.

*Дискусія.* Одночасно з центральним бокові стрижні піддаються просторовим згинним коливанням, виконуючи приблизно два повних цикли. Не залежно від того під якими кутами встановлено стрижні, характер коливань залишається тим самим: перший максимум з'являється через 4,6 мс, локальний мінімум – через 9,4 мс і другий максимум – через 12,7 мс. Загальний час внутрішньої балістики складає 15,8 мс і не залежить (в межах точності обчислень) від налаштувань стабілізатора, а от стосовно згинних відхилень спостерігаються суттєві зміни в залежності від того, в яких напрямках встановлено бокові стрижні (рис. 4). Найбільше відхилення у нормальному напрямку за абсолютною величиною ( $q_v = 12,3; 2,3; 8,4$ ) при всіх трьох екстремумах має місце, коли бокові стрижні максимально розведені ( $\beta = 0,611$ ) й встановлені в одній площині з центральним стрижнем ( $\alpha = 0$ ). Тангенціальні складові є найбільшими ( $q_t = 5,3; 1,0; 3,4$ ) при максимальному розведенні бокових стрижнів та найбільшому відхиленні їхньої площини від осі центрального стрижня ( $\alpha = 0,294$ ). Як і слід було очікувати, при паралельному положенні осей ( $\alpha = 0$ ) тангенціальні складові згинних коливань в наслідок симетричності задачі відсутні ( $q_t = 0$ ) не залежно від того, під яким кутом їх встановлено відносно центрального стрижня (табл. 2). Привертає до себе увагу той факт, що відносно найменші величини загального згину бокових стрижнів ( $q_d(\alpha = 0) = 6,8; 1,1; 4,4$ ;  $q_d(\alpha = 0,294) = 9,2; 1,6; 6,5$ ) мають місце при максимальному розведенні цих стрижнів не залежно від того, в якій площині вони встановлені.

Корисна функція стабілізатора «забирати» на себе частину енергії коливань руківки лука проявляється, зокрема, в згині його стрижнів. Кількісною характеристикою цього процесу є відхилення осі стрижнів внаслідок згину. Як видно з результатів обчислювального експерименту, величина згинних коливань бокових стрижнів суттєво залежить від їхнього

положення. За решти рівних умов, амплітуди згинних коливань зменшуються при збільшенні кута ( $\beta$ ) між осями стрижнів. Якщо осі всіх трьох стрижнів стабілізатора розміщені в одній площині, має місце зменшення в 1,6 рази, а при максимальному відхиленні площини бокових стрижнів від центрального – в 1,3 рази. Навпаки, при збільшенні кута нахилу ( $\alpha$ ) площини бокових стрижнів до осі центрального стабілізатора, спостерігається збільшення амплітуд згинних коливань в 1,2 рази не залежно від того, наскільки розведені бокові стабілізатори.

Таблиця 2

Згинні переміщення вільних кінців бокових стрижнів стабілізатора

Екстремуми	$\alpha$	0			0,294 (17°)		
	$\beta$	$q_v$	$q_\tau$	$q$	$q_v$	$q_\tau$	$q$
max-1	0,611 (35°)	10,6	0	10,6	12,3	0	12,3
min		2,0	0	2,0	2,3	0	2,3
max-2		6,8	0	6,8	8,4	0	8,4
max-1		6,7	1,2	6,8	7,5	5,3	9,2
min		1,1	0,2	1,1	1,3	1,0	1,6
max-2		4,3	0,7	4,4	5,5	3,4	6,5

В результаті згинних деформацій відбувається розсіяння енергії коливань стрижнів. Кількісною характеристикою цього процесу є декремент затухання:

$$\delta = \ln \frac{q_1}{q_2}, \text{ де } q_1, q_2 - \text{максимальні відхилення послідовних циклів коливань [2].}$$

Декремент затухання характеризує швидкість згасання коливань. Величина, обернена до декременту затухання – це кількість циклів, на протязі яких амплітуда коливань маліє в  $e$  разів. Беручи до уваги перший і другий максимуми (див. табл. 2), отримаємо для опрацьованих результатів  $\delta = 0,31 \div 0,54$ . Ці величини свідчать про високий рівень демпферних властивостей бокових стрижнів, оскільки в теорії коливань механічних систем вважають добротність резонансної системи високою, якщо значення

декремента затухання вище однієї десятої. Звідси можна визначити, що за чотири-сім циклів коливань, тобто на протязі  $0,04 \div 0,07$  с (див. рис. 4) амплітуди коливань зменшаться на порядок раз (пам'ятаємо, що  $e \approx 2,7$ ).

Відповідно до властивостей розробленої моделі величина розсіяння енергії деформації стрижнів пропорційна величині дисипативної функції Релея. З форми функції (14) видно, що потужність розсіяння пропорційна квадратові швидкості деформації стрижнів, тобто – величині їхніх згинів у квадраті, які залежать від положення бокових стрижнів. Оскільки при зведенні бокових стрижнів та збільшенні площини їхнього нахилу згинні деформації зростають, відповідно зростає розсіяння енергії (табл. 2). Чим більша частина енергії системи «лук-стабілізатори» буде розсіяно під час спільного руху стріли з тятивою, тим менше залишиться енергії у формі вібрації після вильоту стріли. Таким чином, з метою збільшення дисипативної здатності стабілізатора, можна рекомендувати інсталяцію бокових стрижнів зі зменшеним зведенням осей і зі збільшеним нахилом їхньої площини до центрального стрижня. Так, при максимальному нахилі площини бокових стрижнів відносно центрального розсіюється в 1,4 рази більше енергії, ніж при інсталяції трьох стрижнів стабілізатора в одній площині. При максимально розведених бокових стрижнях спостерігається збільшення розсіювання енергії в  $1,7 \div 2,6$  рази в залежності від того, наскільки нахилені бокові стрижні відносно центрального.

### *Висновки*

Механіко-математична модель стабілізатора спортивного лука на основі технічної теорії динамічного згину довгих стрижнів показала свою ефективність і практичну корисність при дослідженні рухів системи «стріла-лук» у вертикальній площині.

Одночасно з центральним бокові стрижні піддаються просторовим згинним коливанням, виконуючи приблизно два повних цикли. Не залежно від того під якими кутами встановлено стрижні, характер коливань залишається

тим самим: перший максимум з'являється через 4,6 мс, локальний мінімум – через 9,4 мс і другий максимум – через 12,7 мс.

Встановлено, що при максимальному нахилі площини бокових стрижнів відносно центрального розсіюється в 1,4 рази більше енергії, ніж при інсталяції трьох стрижнів стабілізатора в одній площині. При максимально розведених бокових стрижнях спостерігається збільшення розсіювання енергії в  $1,7 \div 2,6$  рази в залежності від того, наскільки нахилені бокові стрижні відносно центрального.

*Рекомендації.* З метою пом'якшити віддачу руків'я та інтенсивність вібрацій лука шляхом збільшення дисипативної здатності стабілізатора, можна рекомендувати встановлювати бокові стрижні зі зменшеним зведенням осей і зі збільшеним нахилом їхньої площини до центрального стрижня.

*Перспективи досліджень у даному напрямку* пов'язані з двома проблемами, які потрібно розв'язати для поглиблення аналізу процесів стабілізації системи стрілець-лук. Перша з них – це врахування параметрів тіла лучника при аналізі взаємодії з руків'я, до якої закріплено три стрижневий стабілізатор. Науковим підґрунтям для розв'язання цієї проблеми може слугувати механіко-математична модель динамічних процесів, що відбуваються в системі стрілець-лук-стріла в інтервалі часу спільного руху стріли з тятивою.

Друга проблема – це аналіз вібраційних процесів та вплив на них стабілізатора лука після відриву стріли від тятиви. Основою для побудови механіко-математичної моделі такої системи може бути метод аналізу вібраційних процесів, що супроводжують постріл зі спортивного лука.

---

### *Література*

1. Easton X10™ Stabilizer System. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.eastonarchery.com>
2. Inman D. J. Engineering Vibration, Boston: Prentice Hall, 2001. – 621 p.
3. WIN&WIN Recurve Bow. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.win&win.com>

4. Zanevskyy I. Archery bow stabiliser modelling // The Impact of Technology on Sports (Ed. F.K Fuss, A. Subic, S. Ujihashi. – Taylor & Francis, London, 2008. – 733-739.
5. Zanevskyy I. Dynamics of “arrow-bow” system // Journal of Automation and Information Sciences. – 1999. - №31 (3). - P.11-17
6. Zanevskyy I. Lateral deflection of archery arrows // Sports Engineering.- 2001.- Vo 4. - No 1. - P.23-42.
7. Zanevskyy I. Mechanical and mathematical modeling of sport archery arrow ballistics // International Journal of Computer Science in Sport. – 2008. - Vol. 7, No. 1, 37-46.
8. Zanevskyy I. Modeling and computer simulation of bow stabilization in the vertical plane // International Journal of Sports Science and Engineering. – 2008. - Vol. 2, No. 1, 3-14.
9. Zanevskyy I. Modeling of the archery bow and arrow vibrations // Shock and Vibration. – 2009. - Vol. 16, No. 3, 203-212.
10. Виноградський Б.А. Моделювання складних біомеханічних систем і його реалізація в спорті.- Л.: ЗУКЦ, 2007.- 284 с.
11. Заневський І.Ф. Математическое и компьютерное моделирование системы “спортсмен-лук-стрела” // Наука в олимпийском спорте. - 2005. - №2. – С.128-136.
12. Заневський І.П. Динаміка системи лук-стріла у вертикальній площині // Машинознавство. - 2003. - № 8. - С.7-15.
13. Заневський І.П. Моделювання процесів стабілізації спортивного лука у вертикальній площині. // Теорія і методика фізичного виховання – 2009. - №6. - С. 12-18, 35.
14. Калиніченко О.М. Кількісна оцінка складових наведення зброї в стрільбі з лука. // Теорія і методика фізичного виховання – 2009. - №6. - С. 36-44.

Додаток 1

Мас-інерційні характеристики стрижнів стабілізатора

$$\int_0^{l_c} \rho_c \chi dz_c = \frac{1}{2} m_c (3J_2 - J_3); \int_0^{l_c} \rho_c \chi dz_c = \frac{1}{2} m_c l_c (3J_3 - J_4);$$

$$\int_0^{l_c} \rho_c \chi^2 dz_c = \frac{1}{4} m_c (9J_4 - 6J_5 + J_6)$$

$$\int_0^{l_c} \rho_c \chi dz_c = \frac{1}{2} m_c (3J_2 - J_3); \int_0^{l_c} \rho_c \chi z_c dz_c = \frac{1}{2} m_c l_c (3J_3 - J_4);$$

$$\int_0^{l_c} \rho_c \chi^2 dz_c = \frac{1}{4} m_c (9J_4 - 6J_5 + J_6); \int_0^{l_c} \rho_c z_c dz_c = m_c l_c J_1; \int_0^{l_c} \rho_c z_c^2 dz_c = m_c l_c^2 J_2$$

Додаток 2

Mathematica програма обчислювального експерименту стосовно внутрішньої балістики лука з тристрижньовим стабілізатором.

```

ξA0 = 0.7576; ηA0 = 0.0426237; θU0 = 0.765512; θL0 = 0.794188; mA = 0.0023; mU = 0.107; mL = 0.107; mH = 2.13;
rU = 0.228; rL = 0.228; lU = 0.531; lL = 0.531; hU = 0.342; hL = 0.342; SU = 0.780; SL = 0.840; f = 25515; IU = 0.00682;
IL = 0.00682; IH = 0.213; cU = 69.1; cL = 69.1; φU = 0.604672; φL = 0.607552; IA = 0.00736; mA = 0.0224; rA = 0.5103;
lA = 0.783; ηP0 = 0.0426237; g = 9.81; xV = -0.107; yV = -0.142; mC = 0.193; cC = 618; lC = .76; kC = 1.16; mD = 0.065;
cD = 6970; lD = .25; kD = .327; α = .297; β = .617; IC = mC * (lC^2 / 3 + xst^2 + yst^2 - lC * yst); MC = .043; MD = .043;
MV = .119; IV = .00431; QV = .5 * (.75 * (xV * Sin[α] * Cos[β] - yV * Cos[α]) - .55 * lD * Cos[β]);
Qτ = .5 * (.75 * xV - .55 * lD * Sin[α]) * Sin[β]; ψ0 = (ηP0 - ηA0) / lA; ζ = -ArcTan[(ηA'[t] + rA * ψ'[t]) / ξA'[t]];
sU = sqrt(SUη^2 + SUξ^2); sL = sqrt(SLη^2 + SLξ^2); eU = (f * (sU - SU)) / (sU * SU); eL = (f * (sL - SL)) / (sL * SL);
SUη = hU + lU * b1 - ηA[t]; SUξ = hU * x[t] + lU * b2 - ξA[t]; SLη = -hL - lL * b3 - ηA[t]; SLξ = -hL * x[t] + lL * b4 - ξA[t];
b1 = Cos[x[t] + θU[t]]; b2 = Sin[x[t] + θU[t]]; b3 = Cos[-x[t] + θL[t]]; b4 = Sin[-x[t] + θL[t]];
system = {(mA + ma) * ξA''[t] - eU * SUξ - eL * SLξ == 0,
(mA + ma) * ηA''[t] + mA * rA * ψ''[t] + mA * g - eU * SUη - eL * SLη == 0,
IA * ψ''[t] + mA * rA * (ξA''[t] * ψ[t] + g * ηA''[t]) == 0,
IU * (θU''[t] + x''[t]) + mU * rU * hU * b1 * x''[t] +
cU * (θU[t] + φU) + eU * lU * (SUξ * b1 - SUη * b2) == 0,
IL * (θL''[t] - x''[t]) - mL * rL * hL * b3 * x''[t] +
cL * (θL[t] + φL) + eL * lL * (SLξ * b3 + SLη * b4) == 0,
(IH + IU + IL + mU * hU^2 + mL * hL^2 + IC + IV + MV * (xV^2 + yV^2) +
2 * mD * (xV^2 + yV^2 + (yV * Cos[α] * Cos[β] - xV * Sin[α]) * lD + ((Sin[α])^2 + (Cos[α])^2 * (Cos[β])^2) * lD^2 / 3) +
MC * (xV^2 + (lC - yV)^2) + 2 * MD * ((xV - lD * Sin[α])^2 + (yV + lD * Cos[α] * Cos[β])^2) * x''[t] + IU * θU''[t] -
IL * θL''[t] + mU * rU * hU * (b1 * (θU''[t] + 2 * x''[t]) - b2 * (θU'[t] + x'[t])^2) -
mL * rL * hL * (b3 * (θL''[t] - 2 * x''[t]) - b4 * (θL'[t] - x'[t])^2) + 2 * mD * (QV * qV''[t] + Qτ * qτ''[t]) +
eU * (SUξ * (lU * b1 + hU) - SUη * lU * b2) -
eL * (SLξ * (lL * b3 + hL) + SLη * lL * b4) + (mC * (.55 * lC / 2 - .75 * yV / 2) + MC * (lC - yV)) * qC''[t] +
2 * MD * ((xV - lD * Sin[α]) * Sin[α] * Cos[β] - (yV + lD * Cos[α] * Cos[β]) * Cos[α]) * qV''[t] +
(xV - lD * Sin[α]) * Sin[β] * qτ''[t]) == 0,
mC * (33 * qC''[t] / 140 + (.55 * lC - .75 * yV) * x''[t] / 2) + MC * (lC - yst) * x''[t] + kC * qC'[t] + cC * qC[t] == 0,
mD * (QV * x''[t] + 33 * qV''[t] / 140) + MD * ((xV - lD * Sin[α]) * Sin[α] * Cos[β] - (yV + lD * Cos[α] * Cos[β]) * Cos[α]) * x''[t] +
kD * qV'[t] + cD * qV[t] == 0, mD * (Qτ * x''[t] + 33 * qτ''[t] / 140) + MD * (xV - lD * Sin[α]) * Sin[β] * x''[t] + kD * qτ'[t] + cD * qτ[t] ==
0,
ξA[0] == ξA0, ηA[0] == ηA0, θL[0] == θL0, θU[0] == θU0, ψ[0] == ψ0, ψ'[0] == 0, x[0] == 0, ξA'[0] == 0, ηA'[0] == 0,
θL'[0] == 0, θU'[0] == 0, x'[0] == 0, qC[0] == 0, qC'[0] == 0, qV[0] == 0, qV'[0] == 0, qτ[0] == 0, qτ'[0] == 0; t0 = 0;
t1 = 0.01579;
solution = NDSolve[system, {ξA, ηA, ψ, θL, θU, x, qC, qV, qτ}, {t, t0, t1}, MaxSteps -> 10000, Method -> ExplicitRungeKutta];
Plot[Evaluate[qC[t] /. solution], {t, t0, t1}]; Plot[Evaluate[qV[t] /. solution], {t, t0, t1}];
Plot[Evaluate[qτ[t] /. solution], {t, t0, t1}];

```