

Заневський І.П.

ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ В НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ З ПРОБЛЕМ ФІЗИЧНОЇ КУЛЬТУРИ І СПОРТУ

Львівський державний університет фізичної культури

Анотація

Заневський І.П. Задачі оптимізації в наукових дослідженнях з проблем фізичної культури і спорту.

Метою роботи було розробити підходи до постановки й розв'язання задачі оптимізації стосовно проблем фізичного виховання і спорту. Дослідження проведене з використанням методів теоретичної механіки, диференціального числення, комп'ютерної алгебри; варіаційного принципу Гамільтона, рівнянь Лагранжа другого роду, власних форм коливань, теорії динамічної стійкості, регресійного аналізу, методу ітерацій. Показано необхідність формулювання критерію оптимальності й параметрів оптимізації, а також коректного використання цих термінів. Поставлено й розв'язано задачі оптимізації техніки штовхання ядра, аналізу регресійних залежностей параметрів рухової діяльності людини й динаміки системи «стрілець-лук-стріла».

Ключові слова: фізична культура, спорт, оптимізація, моделювання, регресія, штовхання ядра, стрільба з лука.

Аннотация

Заневский И.Ф. Задачи оптимизации в научных исследованиях по проблемам физической культуры и спорта.

Целью работы было разработать подходы к постановке и решению задачи оптимизации относительно проблем физического воспитания и спорта. Исследование проведено с использованием методов теоретической механики, дифференциального исчисления, компьютерной алгебры, вариационного принципа Гамильтона, уравнений Лагранжа второго рода, собственных форм колебаний, теории динамической устойчивости, регрессионного анализа, метода итераций. Показана необходимость формулирования критерия оптимальности и параметров оптимизации, а также корректного использования этих терминов. Поставлены и решены задачи оптимизации техники толкания ядра, анализа регрессионных зависимостей параметров двигательной деятельности человека и динамики системы «стрелок-лук-стрела».

Ключевые слова: физическая культура, спорт, оптимизация, моделирование, регрессия, толкание ядра, стрельба из лука.

Abstract

Zanevskyy I.P. Problems of optimization in scientific researches on the problems of Physical Culture and Sports.

The aim of the work was to elaborate attempts to formulation and solving of the problem of optimisation regarding the issues of Physical Education and Sports. The research was done using the methods of theoretical mechanics, differential calculus, computer algebra, Hamilton's variation principle, Lagrange's equation of the second kind, natural modes of oscillation, theory of dynamic stability, regression analysis, and the iteration method. Necessity of formulation of the criteria of optimality and parameters of optimization and correct use of these terms is made clear. The problems of optimisation of technique in the shot-putting sport, regression analysis of parameters in the human motor activity, and dynamics of the "archer-bow-arrow" system are assigned and solved.

Key words: Physical Culture, Sports, optimisation, modelling, regression, shot-putting, archery.

Постановка проблеми. Задачі оптимізації є важливими для фізичного виховання і спорту в різних площинах. Модельні характеристики – це ідеальні характеристики стану спортсмена, в якому він може показати результати, що відповідають найвищим світовим досягненням. Прикладом можуть бути можливі характеристики майбутнього рекордсмену світу в бігу на 800 м (наприклад, величина споживання кисню за одну хвилину або максимальна швидкість бігу). Індивідуальні норми ґрунтуються на порівнянні показників одного й того ж спортсмена у різних станах. У кожного спортсмена є індивідуально оптимальна вага, яка відповідає стану спортивної форми. Цю індивідуальну норму можна визначати, систематично реєструючи вагу даного спортсмена на протязі певного часу [1].

Однак зазвичай, термін «оптимізація» використовується фахівцями фізичної культури і спорту в сенсі «удосконалення» або «покращання» і т.п. В наукових працях правильне вживання термінів, понять – це не тільки проблема стилю, але, перш за все – суті. Тому вживання термінів «оптимізація», «оптимальний» і т.п. в наукових роботах з фізичної культури і спорту потребує обережного ставлення й кваліфікованого підходу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. До Зведеного плану науково-дослідної роботи у сфері фізичної культури і спорту на 2006-2010 роки внесено тринадцять наукових тем, у назвах яких або в описах очікуваних наукових і практичних результатів вжито слова «оптимізація», «оптимальний» [2]. У Зведеному плані на 2001-2005 роки таких тем було дев'ять [3]. В бібліотеці Львівського державного університету фізичної культури зберігається 67 авторефератів дисертацій, в назвах яких вжиті ці терміни [4]. Наприклад, дисертаційне дослідження за темою «Оптимізація фізичної підготовки курсанток вищих військових навчальних закладів з урахуванням специфіки етапів професійного навчання», виконано по спеціальності 24.00.02 – Фізична культура, фізичне виховання різних груп населення, а дисертаційне дослідження за темою «Оптимізація швидко-силових компонентів техніки індивідуальних комбінацій ударів боксерів на етапах

багаторічної підготовки» виконано по спеціальності 24.00.01 – Олімпійський і професійний спорт (Додаток 1).

У завданнях дисертаційних досліджень, у формулюваннях результатів терміни «оптимізація», «оптимальний» зустрічаються на порядок частіше. Окрім цього, значна частина наукових публікацій у галузі фізичної культури і спорту стосується моделювання, присвячено модельним характеристикам спортсменів, що за визначенням передбачає розв'язання задачі оптимізації.

В загальному вжитку під терміном «оптимізація» розуміють процедуру знаходження оптимальних характеристик явищ, об'єктів, процесів. Оптимальний (від лат. *optimus* – найкращий) – це найкращий з можливих варіантів чогось, найбільш відповідний даному завданню, умовам [5]. Задачі оптимізації сформульовано строго математично, вони є характерними для фізико-математичних наук. Так, в номенклатурі наукових спеціальностей [6] є такі назви: 01.01.09 – Варіаційне числення та теорія оптимального керування й 01.05.04 – Системний аналіз і теорія оптимальних рішень.

У минулому столітті задачі оптимізації розповсюдилися на технічні й економічні науки. В цьому сенсі Вікіпедія дає таке визначення [7]: «Оптимізація (рос. *оптимизация*, англ. *optimisation*, нім. *Optimierung* *f*) – процес надання будь-чому найвигідніших характеристик, співвідношень (напр., О. виробничих процесів і виробництва). Задача О. сформульована, якщо задані: критерій оптимальності (економічний – тощо; технологічні вимоги – вихід продукту, вміст домішок в ньому та ін.); параметри, що варіюються (напр., температура, тиск, величини вхідних потоків у процесах переробки гірничої та ін. сировини), зміна яких дозволяє впливати на ефективність процесу; математична модель процесу; обмеження, пов'язані з економічними та конструктивними умовами, можливостями апаратури, вимогами вибухобезпеки та ін...».

Критерій оптимальності – фундаментальне поняття системи оптимального функціонування об'єктів (машин, процесів, підприємства, галузі, економіки у цілому). В економіці, наприклад, критерій оптимальності може бути максимум прибутку, мінімум трудових затрат, мінімальний час досягнення мети тощо...».

Практично у всіх наукових роботах з фізичного виховання і спорту, де йдеться про оптимальні параметри, оптимізацію й т.п., власне задача оптимізації не розв'язується. Така задача дослідниками навіть і не ставиться, оскільки не формулюються критерій оптимальності й параметри оптимізації. Поряд з тим, у великій кількості наукових робіт, як ми бачимо, проблема оптимізації стоїть на першому плані, що відбиває сучасні потреби практики фізичного виховання і спорту.

Мета роботи: Розробити підходи до постановки й розв'язання задачі оптимізації стосовно проблем фізичного виховання і спорту.

Методика: бібліографічний пошук; теоретична механіка (статика, кінематичний аналіз); диференціальне числення; комп'ютерна алгебра;

варіаційний принцип Гамільтона; рівняння Лагранжа другого роду; власні форми коливань; теорія динамічної стійкості; регресійний аналіз; метод ітерацій; системи комп'ютерної математики (Excel, Mathematica).

Оптимізація техніки штовхання ядра. Зі шкільного курсу фізики пам'ятаємо, що найбільшу дальність польоту має тіло, випущене під кутом сорок п'ять градусів до горизонту. Це якщо початок і кінець польоту знаходяться на однаковій висоті. При штовханні ядра початкова висота сумірна за величиною із дальністю польоту. Очевидно, що кут, при якому дальність буде максимальною, залежатиме від співвідношення між початковою висотою й початковою швидкістю ядра. Це – типова задача оптимізації, критерієм оптимальності в якій є спортивний результат (дальність польоту ядра), а параметром оптимізації – показник техніки виконання спортивної вправи (кут вильоту ядра).

Характерні риси змістовної моделі процесу: опір повітря відсутній; ядро розглядається як матеріальна точка; висота, поздовжня координати й початкова швидкість ядра (на момент відриву від руки атлета) не залежать від кута вильоту. Відповідна математична модель може бути подана системою двох алгебричних рівнянь. Перше рівняння описує вертикальну складову руху ядра, а друге – горизонтальну складову (рис. 1):

$$h + vt \sin a = \frac{1}{2}gt^2; \quad s = vt \cos a, \quad (1)$$

де h – висота відриву ядра від руки атлета; v – початкова швидкість ядра; t – час польоту ядра; a – початкове значення кута піднесення (вильоту) ядра; g – прискорення вільного падіння; s – дальність польоту ядра (спортивний результат).

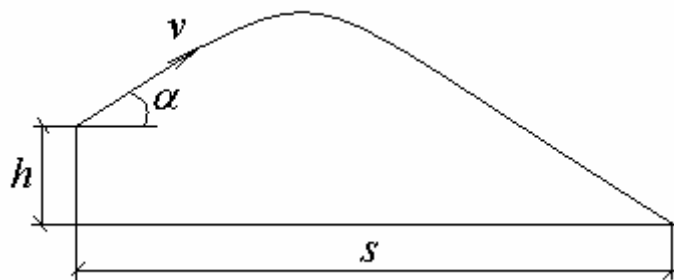


Рис. 1. Схема для розрахунку оптимального кута піднесення

Отримавши з другого рівняння (1) вираз для часу $t = \frac{s}{v \cos a}$ й підставляючи його у перше рівняння, отримуємо квадратичне рівняння відносно дальності польоту ядра: $\frac{gs^2}{2v^2 \cos a} - s \sin a - h \cos a = 0$, розв'язок

якого має вигляд: $s_{1,2} = \frac{v^2 \cos a \left(\sin a \pm \sqrt{\sin^2 a + 2gh/v^2} \right)}{g}$. Змістовній

моделі процесу ($s > 0$) відповідає варіант розв'язку з додатнім значенням

квадратного кореня, який запишемо у формі:
 $\frac{sg}{v^2} = \cos a \left(\sin a + \sqrt{\sin^2 a + 2gh/v^2} \right)$. При нульовому значенні першої похідної дальності польоту по куту піднесення в початковий момент $\left(\frac{\partial s}{\partial a} = 0 \right)$ алгебричний вираз для спортивного результату набуває екстремальних значень за умови:

$$(1 - 2z^2) \sqrt{z^2 + a} - z(2z^2 + a - 1) = 0, \quad (2)$$

де $z = \sin a$; $a = 2gh/v^2$ – безрозмірний параметр.

Позбавляючись в рівнянні (2) від радикалу й спрощуючи проміжне рівняння

$$z^2 + a = \left[\frac{z(2z^2 + a - 1)}{1 - 2z^2} \right]^2, \text{ отримуємо розв'язок:}$$

$$z = \frac{\pm 1}{\sqrt{2 + a}}. \quad (3)$$

Цей самий розв'язок (3) отримуємо з використанням програма Solve в середовищі СКМ Mathematica. Оскільки кут піднесення відповідно до прийнятої змістовної моделі може набувати тільки додатні значення ($0 < a < p/2$), вираз для розв'язку (3) записуємо у варіанті додатного значення параметра z ($s \rightarrow \max$): $a = \arcsin(2 + a)^{-0,5}$.

Графік залежності оптимального значення кута піднесення в момент вильоту ядра збудовано в Excel і представлено на рис. 2. При нульовому значенні параметра a (тобто за нульової висоти вильоту ядра, що можна розглядати тільки як теоретичний варіант моделі) оптимальним є початкове значення кута піднесення $a = 45^\circ$. При збільшенні висоти вильоту оптимальна величина кута піднесення зменшуються. При відносно більших значеннях швидкості вильоту ядра вплив висоти на зменшення кута піднесення при вильоті зменшується.

Наприклад, спортивний результат атлета з параметрами $h = 2,27$ м; $v = 12,3$ м/с; $a = 0,294$ (при $g = 9,81$ м/с²) дорівнює $s = 17,55$ м при оптимальному значенні кута вильоту $a = 0,721$ ($41,3^\circ$). Якщо б кут вильоту дорівнював 45° , результат склав би $17,43$ м, тобто був би на $6,6$ % менший від максимально можливого (див. рис. 2).

Таким чином, застосування класичних підходів теорії оптимізації дозволяє розв'язувати задачі, характерні для предметної області фізичного виховання і спорту. Задача оптимізації спортивної техніки атлета у штовханні ядра розв'язується як класична задача оптимізації, критерієм в якій є спортивний результат (дальність польоту ядра), а параметром оптимізації – показник техніки виконання спортивної вправи (кут вильоту ядра).

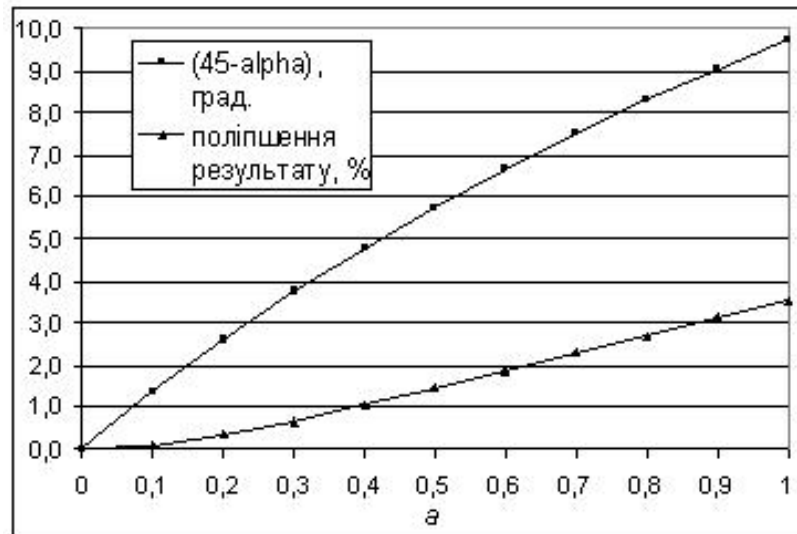


Рис. 2. Зменшення оптимального кута піднесення в момент вильоту ядра й відповідного поліпшення спортивного результату

Рівняння регресії як розв'язок задачі оптимізації. Математична статистика – це єдиний розділ математики, що включено до навчальних програм вищої фізкультурної освіти. Математичні моделі кореляції й регресії широко застосовуються у наукових дослідженнях у галузі фізичної культури і спорту. Модель лінійної регресії, наприклад, є результатом розв'язання задачі оптимізації, однак на викладення відповідного матеріалу у навчальних програмах годин недостатньо.

Механічною аналогією цієї математичної задачі може бути умова рівноваги невагомому прямого стрижня, підвішеного на пружних елементах нульової початкової довжини, які закріплені в точках кореляційного поля (рис. 3). Покажемо це для простоти розуміння на прикладі трьох пар значень ($n = 3$), тобто на вибірці мінімального обсягу, що є необхідним для дослідження статистичних взаємозв'язків (табл.).

Таблиця

Штучний приклад результатів трьох «спортсменів» у підтягуванні на перекладині (x) та віджиманні від підлоги (y)

«спортсмен» i	x_i	y_i
1	1	1
2	4	3
3	3	4

Коефіцієнти рівняння лінійної регресії $Y_x = a + bx$ обчислюються за методом найменших квадратів для функції $F(a;b) = \sum_{i=1}^n (y_i - Y_x)^2$. Це є класичною задачею оптимізації, в якій параметрами оптимізації є коефіцієнти рівняння регресії, а критерієм оптимальності – функція $\Phi(a;b) \rightarrow \min$.

Необхідною умовою мінімуму цієї функції є нульові значення її перших похідних по параметрах:

$$\frac{\partial \Phi(a; b)}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial \Phi(a; b)}{\partial b} = 0. \quad (4)$$

Підставляючи до останніх двох рівнянь вираз функції Φ , отримуємо систему лінійних відносно a і b алгебричних рівнянь:

$$na + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i; \quad a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

З системи цих двох рівнянь визначаємо коефіцієнти рівняння регресії:

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}; \quad a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - b \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

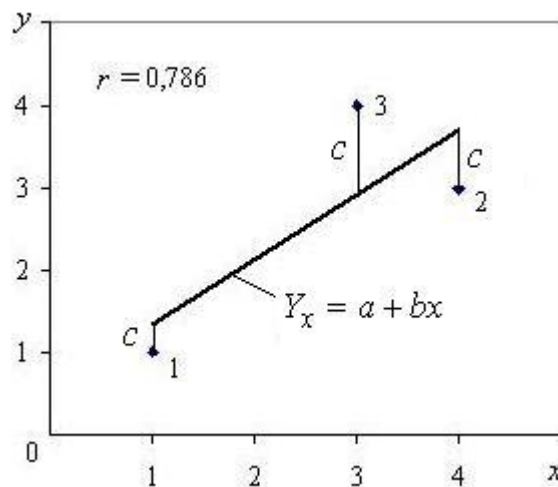


Рис. 3. Кореляційне поле з коефіцієнтом кореляції (r), з лінією та рівнянням регресії

Потенціальна енергія пружних елементів жорсткістю c визначається виразом: $V = \frac{1}{2} c \sum_{i=1}^n (y_i - Y_x)^2$. Як будь-яка інша механічна система, ця система пружних елементів і стрижня в рівновазі займає положення, яке відповідає мінімуму потенціальної енергії: $V(a; b) \rightarrow \min$. Тобто ця задача оптимізації механічної системи розв'язується описаним вище методом найменших квадратів (4).

Таким чином, дослідження статистичних взаємозв'язків між параметрами спортивної діяльності людини з використанням регресійного аналізу виконується на основі математичного апарату теорії оптимізації, критерієм оптимальності в якому є функція методу найменших квадратів, а параметрами оптимізації – коефіцієнти рівняння регресії.

Оптимізація динамічних систем. Аналіз спортивної вправи пострілу з лука потребує розв'язання задач динаміки стосовно системи «стрілець-лук-стріла». Під час пострілу з лука стріла перебуває у двох суттєво різних фазах руху. Перша фаза - це прискорений спільний рух з тятивою і луком (внутрішня балістика). Друга – це вільний політ стріли (зовнішня балістика). Запровадимо до аналізу першої фази руху стріли розроблену нами механіко-математичну модель пострілу з лука [8, 9].

В основу дослідження спільного руху стріли й лука нами покладено модель поздовжнього згину стрижня при дії імпульсного навантаження [10]. Вважаємо, що стріла взаємодіє з луком тільки через тятиву, а опором повітря можна нехтувати. Для аналізу такого типу консервативних систем з голономними ідеальними в'язями в аналітичній механіці Гамільтоном розроблено варіаційний принцип, суть якого коротко можна представити як задачу оптимізації незалежних узагальнених координат q_j , що описують систему. Критерієм оптимізації у принципі Гамільтона прийнято функціонал S , який називають дією за Гамільтоном [11]:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt, \quad (5)$$

де T і V – відповідно кінетична і потенціальна енергія системи; t_1 і t_2 – фіксовані, але довільно обрані моменти часу.

Оскільки час розповсюдження поздовжньої хвилі на довжину древка малий порівняно з періодом згинних коливань стріли [12], потенціальну й кінетичну енергію системи "лук-тятива-стріла" (рис. 4) можна представити виразами:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (y'')^2 dx + \frac{1}{2} c (y_L - y_0)^2 - \frac{a}{2} \int_0^l \left[rF \int_0^x (y' - 2u') y' dc + m_H (y' - 2u') y' \right];$$

$$T = \frac{1}{2} m_0 \dot{y}_0^2 + \frac{1}{2} \int_0^l rF \dot{y}^2 dx + \frac{1}{2} m_H \dot{y}_H^2 + \frac{1}{2} m_L \dot{y}_L^2, \quad (6)$$

де u - початковий вигин осі древка; y_0 – поперечне відхилення хвостовика стріли; y_H – поперечне відхилення наконечника стріли; y_L – координата точки приведення маси лука; rF – погонна маса древка стріли; EJ – погонна поперечна жорсткість древка стріли; m_0 – маса хвостовика стріли з приведеною до нього масою тятиви; m_H – маса наконечника стріли; m_L – приведена до хвостовика стріли маса плечей лука; c – приведена до хвостовика стріли жорсткість тятиви й плечей лука; a – прискорення поздовжнього руху стріли; $(\dot{})$, () – знаки часткових похідних по поздовжній координаті x і по часу t .

Користуючись варіаційним принципом Гамільтона

$$d \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0, \quad (7)$$

отримаємо після підстановки виразів енергії системи (6) у варіаційне рівняння (7) й варіювання за узагальненими координатами $q_i \equiv y(x)$; y_L рівняння поперечних рухів системи:

$$(EJy'')'' - (PY')' + rFy = 0 \quad (8)$$

граничні

$$x=0, \quad y''=0, \quad m_L y_L - c(y - y_L) = 0,$$

$$(EJy'')' + (m_\partial + m_H)aY' + m_0 + c(y - y_L) = 0;$$

$$x=l, \quad y''=0, \quad (EJy'')' + m_H(aY' - y) = 0$$

і початкові умови

$$t=0, \quad y = y_\Lambda = 0, \quad y' = y'_\Lambda = 0, \quad (9)$$

де $m_\partial = \int_0^l rF dx$ – маса деревка стріли; $P = -a(m_H + \int_x^l rF dx)$ – поздовжня сила у поперечному перетині деревка стріли.

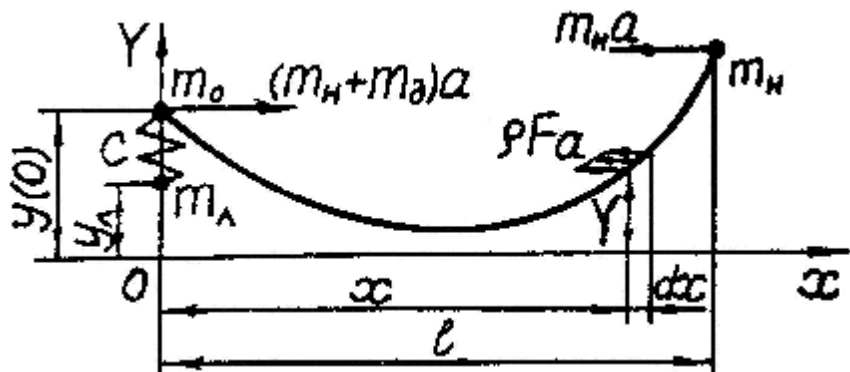


Рис.4. Розрахункова схема парадокса лучника

Співвідношення параметрів сучасних спортивних луків і стріл [13] дозволяють з невеликою похибкою припустити, що $a = const$, $rF = const$. Тоді розв'язок (8, 9) можна записати, розділяючи змінні [14]:

$$y = \sum_k X_k(x) T_k(t); \quad y_\Lambda = \sum_k L_k T_k(t) \quad (10)$$

де X_k – власні форми динамічного поздовжнього згину стріли; $T_k(t)$ – часові функції; L_k – константи (амплітудні відхилення лука).

Таким чином, розв'язання початково-граничної задачі (8, 9) зводиться у першому наближенні до розв'язку одновимірної граничної задачі, який можна отримати шляхом розкладення за власними формами. Підставляючи (10) у (8) і проводячи необхідні перетворення, запишемо в безрозмірних величинах рівняння для власних форм:

$$X_k'''' + p[(1 + m_1 - x)X_k']' - w_k^2 X_k = 0 \quad (11)$$

і відповідні граничні умови

$$x = 0, \quad X_k'' = 0, \quad X_k''' + p(1 + m_1)X_k' + \left(n - m_0 w_k^2 - \frac{n^2}{n - m_2 w_k^2} \right) X_k = 0;$$

$$x = 1, \quad X_k'' = 0, \quad X_k''' + p m_1 X_k' + m_1 w_k^2 X_k = 0,$$

$$\text{де } x = \frac{x}{l}; \quad m_0 = \frac{m_0}{m}; \quad m_1 = \frac{m_H}{m}; \quad m_2 = \frac{m_L}{m}; \quad p = \frac{m_\partial a l^2}{EI}; \quad w_k^2 = \frac{l_k^2 m_\partial l^3}{EI}; \quad n = \frac{c l^3}{EI};$$

w_k – власні частоти у безрозмірній формі.

Представимо розв'язок рівняння (11) у вигляді ступеневого ряду [14]:

$$X_k = \sum_{i=0}^n A_i x^i. \quad (12)$$

В результаті підстановки (12) в (11) і проміжних перетворень отримаємо лінійну відносно A_0 і A_1 систему алгебричних рівнянь:

$$\sum_{i=0}^n i(i-1)A_i = 0; \quad \sum_{i=0}^n i(i-1)(i-2)A_i + p m_1 \sum_{i=1}^n i A_i + w_k^2 m_1 \sum_{i=0}^n A_i = 0, \quad (13)$$

в якій

$$A_2 = 0; \quad A_3 = -\frac{1}{6} \left\{ p(1 + m_1)A_1 + \left[n - m_0 w_k^2 - \frac{n^2}{n - m_2 w_k^2} \right] A_0 \right\};$$

$$A_i = \frac{\frac{w_k^2 A_{i-4}}{i-3} + p[(i-3)A_{i-3} - (1 + m_1)(i-2)A_{i-2}]}{i(i-1)(i-2)}, \quad 4 < i < n.$$

Значення власних частот w_k обертають детермінант системи цих рівнянь на нуль, а з виразу (12) отримуємо власні форми згину стріли. Відповідний алгоритм представлено на рис. 5. Текст комп'ютерної програми наведено в додатку 3.

Результати чисельного експерименту для двох перших власних форм в залежності від характерних параметрів луків і стріл подані у формі графіків на рис. 6 ($w_0 = 0,2$; $w_1 = 0,25$; $w_2 = 2,5$; $v = 20$ – лінія 1; $w_2 = 10$, $v = 20$ – лінія 2; $w_2 = 5$, $v = 40$ – лінія 3; $w_2 = 20$, $v = 40$ – лінія 4). Обчислення проводилися з використанням BASIC програми на персональному комп'ютері з утриманням 21-го члену ряду (12), що зводило абсолютні величини останніх коефіцієнтів A_i до машинного нуля при $A_0 = A_1 = 1$.

Аналіз графіків дозволяє стверджувати, що за решти рівних умов жорсткість тятиви впливає на власні частоти значно сильніше, ніж маса лука. Зі збільшенням сили лука власні частоти зменшуються, і при критичному значенні $p = 14-15$ перша власна частота спадає до нуля. Відбувається динамічна втрата стійкості стріли, й періодичні коливання переходять у

монотонне зростання згину стріли, яка відхиляється від заданого напрямку пострілу.

Отож в основу дослідження спільного руху стріли й лука має бути покладено модель динамічного поздовжнього згину стрижня при дії імпульсного навантаження. При аналізі такого типу консервативних систем з голономними ідеальними в'язями ефективним є варіаційний принцип Гамільтона, застосування якого призводить до розв'язання задачі оптимізації незалежних узагальнених координат системи: форми динамічного поздовжнього згину осі стріли й поперечного переміщення лука.

Рівняння згинних рухів і відповідні початкові умови отримаємо з (8, 9) і (10):

$$I_k^2 \ddot{T}_k + I_k^2 T_k = D_k; \quad (14)$$

при $t = 0, \quad T_k = 0, \quad \dot{T}_k = 0,$

де D_k - константи розкладу функції початкового згину древка за власними формами X_k , що визначаються з системи рівнянь:

$$\sum_k D_k X_k = -\frac{ma}{rF} \left[\left(1 + m_1 - \frac{x}{l} \right) u' \right]. \quad (15)$$

Для сили лука, нижчої від критичної ($w_k > 0$), з (14) отримуємо гармонічний закон коливань:

$$T_k = (1 - \cos I_k t) \frac{D_k}{I_k^2}; \quad (16)$$

для сили лука, вищої від критичної ($w_k < 0$), має місце монотонне зростання амплітуд:

$$T_k = (1 - \operatorname{ch} I_k t) \frac{D_k}{I_k^2}. \quad (17)$$

Порівняння розрахункових (див. рис. 6) та експериментальних результатів швидкісної відеозйомки [15] дозволяє заключити, що при пострілі динамічний згин стріли відбувається переважно за першою і другою власними формами. Вони зображені біля відповідних графіків (див. рис. 6) для параметрів лука $w_2 = 2,5; \nu = 20; p = 5$.

Результати розрахунку з використанням механіко-математичної моделі пострілу з лука якісно співпадають з експериментальними даними. Динамічний поздовжній згин стріли характеризується дво- тривузловими формами. Аналіз результатів дозволяє стверджувати, що за решти рівних умов жорсткість тятиви впливає на частоти згинних коливань стріли значно більше, ніж маса лука. Зі збільшенням сили лука частоти зменшуються, й при критичному значенні відбувається динамічна втрата стійкості стріли. Перевищення критичної сили лука викликає монотонне зростання згинних деформацій, що призводить до зниження точності стрільби.

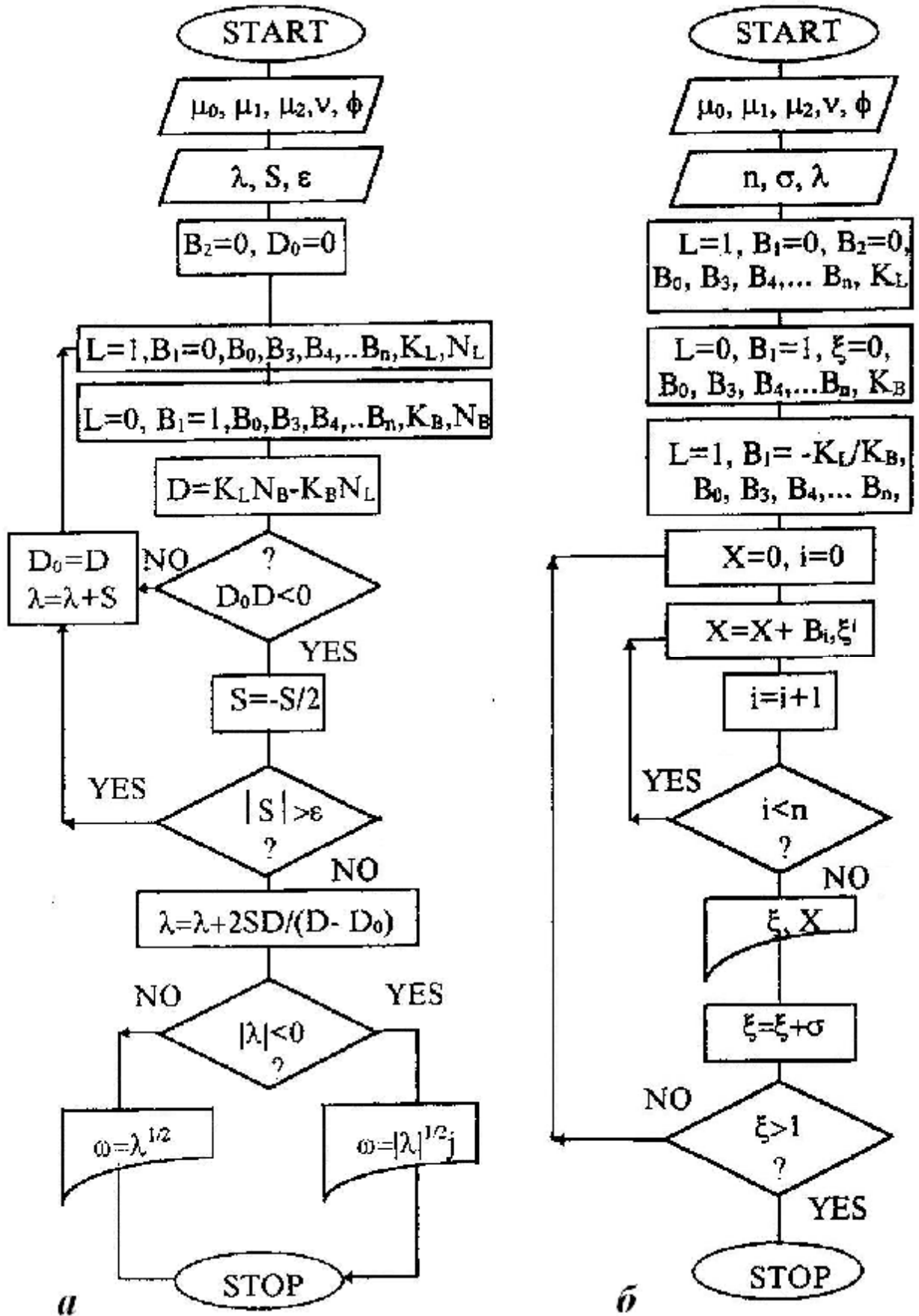


Рис. 5. Блок-схеми алгоритмів обчислення власних частот (а) і власних форм (б) системи «стрілець-лук-стріла»

результат (дальність польоту ядра), а параметром оптимізації – показник техніки виконання спортивної вправи (кут вильоту ядра).

3. Дослідження статистичних взаємозв'язків між параметрами рухової діяльності людини з використанням регресійного аналізу виконується з використанням математичного апарату теорії оптимізації. Критерієм оптимальності в цій задачі є функція методу найменших квадратів, а параметрами оптимізації – коефіцієнти рівняння регресії.

4. В основу дослідження спільного руху стріли й лука має бути покладено модель динамічного поздовжнього згину стрижня при дії імпульсного навантаження. При аналізі такого типу консервативних систем з голономними ідеальними в'язями ефективним є варіаційний принцип Гамільтона, застосування якого призводить до розв'язання задачі оптимізації незалежних узагальнених координат системи, а саме форми динамічного поздовжнього згину осі стріли й поперечного переміщення лука.

Література

1. Спортивная метрология: Учеб. для ин-тов физ. культ. / Под ред. В.М. Зациорского. – М.: Физкультура и спорт, 1982. – 256 с.
2. Зведений план науково-дослідної роботи у сфері фізичної культури і спорту на 2006-2010 рр. – К.: Міністерство України у справах сім'ї, молоді та спорту, 2006. – 60 с.
3. Зведений план науково-дослідної роботи у сфері фізичної культури і спорту на 2001-2005 рр. – К.: Державний комітет молодіжної політики, спорту і туризму України, 2001. – 50 с.
4. Свістельник І.Р. Автореферати дисертацій та дисертації галузі фізичної культури і спорту. Бібліографічний покажчик з анотаціями. – Л.: ЛДІФК, 2007. – 788 с.
5. Словник іншомовних слів. За ред. О.С. Мельничука. – К.: УРЕ, 1975. – 776 с.
6. Перелік спеціальностей, за якими проводяться захист дисертацій на здобуття наукових ступенів кандидата наук і доктора наук, присудження наукових ступенів і присвоєння вчених звань. – К.: ВАК України, 2005: http://www.vak.org.ua/docs//spec_boards/spec_list.doc
7. Оптимізація: <http://uk.wikipedia.org>
8. Zanevskyu I. Dynamics of “arrow-bow” system // Journal of Automation and Information Sciences. – 1999. - №31 (3). - P.11-17
9. Zanevskyu I. Lateral deflection of archery arrows // Sports Engineering.- 2001.- Vo 4. - No 1. - P.23-42.
10. Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Доклады Академии Наук СССР, 1949, т. 64. - С. 779-782.
11. Бутенин Н.В. Введение в аналитическую механику. - М.: Наука, 1971. - 264 с.

12. Zanevskyy I. Bow and arrow dynamics in the vertical plane // Vibrations in physical systems. – Poznan, 2004. – P.93-97.
13. <http://www.ArcheryWholesaleSources.com>
14. Феодосьев В.И. Об одной задаче устойчивости // Прикладная математика и механика, 1965, т.29, вып.2. - С. 391-392.
15. Werner Beiter Zeigt. Highspeed film. – 1992.

Додатки

Додаток 1

Теми дисертаційних робіт з проблем оптимізації у фізичному вихованні і спорті, захищених у спеціалізованій вченій раді К 35.829.01 Львівського державного університету фізичної культури у 2001-2007 роках.

1. Борецько М.М. Оптимізація фізичного виховання дітей 7-8 років засобами легкої атлетики.
2. Бубела О.Ю. Оптимізація процесу формування постави у дітей молодшого шкільного віку з використанням комп'ютерних технологій.
3. Вознюк Т.В. Оптимізація тренувального процесу кваліфікованих баскетболісток засобами швидко-силової спрямованості на передзмагальному етапі підготовки.
4. Драчук А.І. Оптимізація фізичного виховання студентів вищих закладів освіти гуманітарного профілю.
5. Ковальчук А.М. Оптимізація професійно-стрілецької підготовки особового складу підрозділів органів внутрішніх справ України.
6. Луцак А.Р. Оптимізація психофізичної підготовки курсантів вищих закладів освіти МВС України.
7. Мисів В.М. Технологія оптимізації фізичного стану учнів ліцею з посиленою військово-фізичною підготовкою.
8. Нікітенко С.А. Оптимізація швидко-силових компонентів техніки індивідуальних комбінацій ударів боксерів на етапах багаторічної підготовки.
9. Ніколаєв С.Ю. Оптимізація рухової активності студенток залежно від психофізичних особливостей.
10. Піддубний О.Г. Оптимізація фізичної підготовки курсантів вищих навчальних закладів у період первинного професійного навчання.
11. Ріпак М.О. Організаційно-методичні аспекти оптимізації фізичної активності жінок-учителів 36-55 років.
12. Хрипко Л.В. Оптимізація процесу фізичного виховання в аграрних вищих навчальних закладах України з використанням комп'ютерних технологій.
13. Шалепа О.Г. Оптимізація фізичної підготовки курсанток вищих військових навчальних закладів з урахуванням специфіки етапів професійного навчання.

Додаток 2

Програма Mathematica для визначення залежності оптимального кута піднесення від параметрів атлета в момент вильоту ядра.

```
In[2]:= Solve[(1 - 2 * z^2) * sqrt(z^2 + a) + z * (1 - z^2) - z * (z^2 + a) == 0, z]
```

```
Out[2]= {{z -> -1/sqrt(2 + a)}, {z -> 1/sqrt(2 + a)}}
```

Додаток 3

Текст BASIC програми для аналізу динаміки системи «стрілець-лук-стріла».

```
5 REM Поведовжній динамічний згин стріли
10 DIM A(90),B(90)
12 NEXT I
15 INPUT "P=";P
16 MO=.2
17 M1=.25
18 M2=2.5
19 C=20
20 INPUT "W=";W
21 INPUT "S=";S
25 DO=0:M=1+M1
27 G=C-W*MO-C^2/(C-W*M2)
30 A(0)=1:A(1)=0:A(2)=0:A(3)=-G/6:K0=0:L0=0
35 B(0)=0:B(1)=1:B(2)=0:B(3)=-M*P/6:K1=0:L1=0
40 FOR I=4 TO 90
45 A(I)=(W*A(I-4)/(I-3)+P*((I-3)*A(I-3)-M*A(I-2)))/(I*(I-1)*(I-2))
50 B(I)=(W*B(I-4)/(I-3)+P*((I-3)*B(I-3)-M*B(I-2)))/(I*(I-1)*(I-2))
52 NEXT I
53 F=1
54 INPUT "X=";X
55 FOR I=1 TO 90
56 F=F+(A(I)+B(I))*X^(I)
57 NEXT I
58 PRINT X;F
59 GOTO 53
60 K0=K0+A(I)*I*(I-1):L0=L0+A(I)*I*(I-1)*(I-2)+P*A(I)*I-W*M1*A(I)
65 K1=K1+B(I)*I*(I-1):L1=L1+B(I)*I*(I-1)*(I-2)+P*B(I)*I-W*M1*B(I)
70 NEXT I:D=K0*L1-K1*L0
71 PRINT W
75 IF D*DO<0 THEN GOTO 85
80 DO=D:W=W+S:GOTO 27
85 S=-.5*S:IF ABS(S)>.1 THEN GOTO 80
90 PRINT SQR(W+2*S*D/(D-DO))
95 END
```