

Заневський І.П.

ДИНАМІКА ВЗАЄМОДІЇ СТРІЛЬЦЯ З ЛУКОМ

Львівський державний університет фізичної культури

Анотація

Заневський І.П. Динаміка взаємодії стрільця з луком.

Представлено результати теоретичних та експериментальних досліджень системи стрілець-луки-стріли у проекції рухів на вертикальну площину. Метою дослідження було розробити методику комп'ютерного моделювання взаємодії стрільця з луком під час спільного руху стріли з тятивою. Модель тіла стрільця представлено складним механічним осцилятором з інерційними та в'язко-пружними елементами. Механіко-математична модель цілої системи розглядається з позицій статичної для отримання початкових умов задачі Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Задачу розв'язано для прикладу стрільця з луком середніх розмірів, який відповідає стандартам Міжнародної федерації стрільби з лука. Отримано графічні залежності параметрів балістики стріли, кінематики та кінетики взаємодії тіла стрільця з луком. Результати подано у формі, прийнятній для використання у навчально-тренувальному процесі спортсменів-лучників.

Ключові слова: стрільба з лука, балістика, біомеханіка, механіко-математичне комп'ютерне моделювання.

Аннотация

Заневский И.Ф. Динамика взаимодействия стрелка с луком.

Представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований системы стрелок-луки-стрелы в проекции движений на вертикальную плоскость. Целью исследования было разработать методику компьютерного моделирования взаимодействия стрелка с луком во время совместного движения стрелы с тетивой. Модель тела стрелка представлена сложным механическим осциллятором с инерционными и вязкоупругими элементами. Механико-математическая модель системы в целом рассматривается с позиций статичности для получения начальных условий задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Задача решена на примере стрелка с луком средних размеров, который отвечает стандартам Международной федерации стрельбы из лука. Получены графические зависимости параметров баллистики стрелы, кинематики и кинетики взаимодействия тела стрелка с луком. Результаты представлены в форме, приемлемой для использования в учебно-тренировочном процессе спортсменов-лучников.

Ключевые слова: стрельба из лука, баллистика, биомеханика, механико-математическое компьютерное моделирование.

Abstract

Zanevskiy I.P. Dynamics of an archer and a bow interaction.

Theoretical and experimental results of research on the problem of archer, bow and arrow behaviour in the vertical plane are presented. The aim of the research is to develop a method of computer simulation of static and dynamic interaction in the archer, bow and arrow system intending to get practical recommendations for the sport of archery. A model of an archer's body is presented as a mechanical system including a few solid bodies, which are connected one to other and to the ground with viscous-elastic elements. Mechanical and mathematical model of bow and arrow geometry in vertical plane in braced and drawn situations are investigated. An asymmetrical scheme, rigid beams, concentrated elastic elements and elastic string is the main features of the model. Numerical results of computer simulation of archer, bow and arrow interaction are presented in graphical form, which makes easy to use the methods by sportsmen and coaches.

Key words: archery, biomechanics, ballistics, mechanical and mathematical modelling, computer simulation.

1. Вступ

Після випуску тятиви під час прискорення її разом зі стрілою система стрілець-лук-стріла знаходиться у складному просторовому русі. Головні переміщення відбуваються у вертикальній площині й характеризують взаємодію між замкненим кінематичним ланцюгом руківка-плечі-тятива зі стрілою та лучником. Одночасно зазначені елементи системи здійснюють латеральні переміщення, тобто виходять з вертикальної площини.

Строгий аналіз просторового руху системи був би значно складнішим порівняно з аналізом проекцій рухів окремо на вертикальну та латеральну площини. З іншого боку, з огляду на розумний рівень точності, що визначається потребами спортивної практики, проведення загального просторового аналізу не є необхідним. Переважна частина потенціальної енергії, накопиченої в плечах лука, перетворюється на кінетичну енергію поздовжнього руху стріли. Лише невелика частина енергії пов'язана з латеральними переміщеннями. Отож, хоча система знаходиться у просторовому русі, задача її аналізу може бути розкладена на дві окремі задачі стосовно руху у вертикальній та латеральній площинах. При цьому рух у вертикальній площині можна вважати незалежним від латеральних переміщень, а останні вважати рухами з кінематичним збудженням від поздовжнього переміщення.

Першим кроком до розуміння внутрішньої балістики стріли було пояснення відомого вже понад два століття феномена у стрільбі з лука, названого парадоксом лучника. Дослідження проводили з використанням стробоскопії з метою з'ясувати, як рухається стріла після випуску тятиви та яким чином вона оминає руківку лука Klopsteg [3]. Було виявлено, що стріла не рухається поступально у вертикальній площині, а разом з тятивою має ще й латеральні переміщення, а також згинні деформації. У

положенні випуску тятиви стріла знаходиться під деяким кутом до головної площини лука. Цей напрямок визначається спеціальними пристроями на руківці: плунжером та поличкою. Перший з них дає змогу встановити кут стріли до площини лука, а друга – кут піднесення у цій площині. Отже, прискорююча сила від тятиви не діє вздовж осі стріли. Латеральні рухи системи залежать також від бокового імпульсу пальців, коли стрілець випускає тятиву. До причин виникнення латеральних рухів варто також додати невеликі відхилення плечей та руківки від головної площини лука, а також натуральну непрямолінійність осі стріли. Сприятливе або ні поєднання названих факторів спричинює або ні огинання стрілою руківки лука.

Механіко-математичну модель парадокса лучника розробив Пенкальський [6] та вдосконалили Коої [4] і ми [8, 9]. Ми також започаткували моделювання рухів системи стрілець-лук у вертикальній площині методом псевдостатики [2, 10, 18], а також з використанням методів аналітичної динаміки [11]. Існує дослідження динаміки системи лук-стріла для традиційного японського лука [5], принципова схема якого істотно відрізняється від сучасного спортивного лука. Окрім того, у відомих дослідженнях фактор стрільця враховували тільки з огляду на те, що рука стрільця забезпечувала нерухомість точки упору на руківці лука. Таким чином, у відомих теоретичних моделях не враховано біомеханічних властивостей тіла стрільця для аналізу взаємодії складових системи стрілець-лук-стріла.

Метою роботи є створення механіко-математичної моделі взаємодії стрільця з луком, яка б дозволила врахувати біомеханічні параметри тіла стрільця для аналізу поведінки системи у вертикальній площині.

Методи: біомеханіки (моделювання тіла людини як системи механічних осциляторів), теоретичної механіки та математики (рівняння Лагранжа другого роду; принцип Даламбера; задача Коші; метод ітерацій; метод Рунге-Кутта), комп'ютерної математики (MathCAD; Mathematica), експериментальні методи (високошвидкісний відеокomp'ютерний аналіз; натурне механічне моделювання).

2. Модель тіла стрільця

Спортивна вправа стрільби з лука за правилами FITA (Міжнародної федерації стрільби з лука) складається з трьох послідовних дій стрільця: розтягування лука, прицілювання й випуску тятиви. Загалом ціла вправа триває декілька секунд, а остання фаза – прискорення стріли тятивою – на два-три порядки менше, тобто малу частку секунди. Саме цей швидкоплинний процес визначає напрямок та інші параметри балістики стріли, а зрештою, і спортивний результат.

Важливість фази спільного руху стріли з тятивою, а отже, й з цілим луком, що тримає стрілець, пояснює пильний інтерес дослідників до аналізу динаміки цієї взаємодії. Ці дослідження проводяться з використанням експериментальних і аналітичних методів. У результаті акселерометричних

досліджень встановлено загальний час тривалості процесу, закони імпульсного переміщення характерних точок руківки лука у трьох ортогональних напрямках [20]. За допомоги швидкісної відеозйомки отримано картину просторових переміщень стріли з гніздом тятиви, а також картину її взаємодії з поличкою та плунжером на руківці лука [7].

Аналітичні дослідження стосувалися розробки механіко-математичних моделей спільного руху стріли з луком, причому припускалося, що руківка лука (або одна її точка контакту з кистю стрільця) є нерухомою [4-6]. Таким чином, тіло стрільця у відомих дослідженнях не брали до уваги, хоча за результатами згаданих вище експериментальних досліджень рука, що утримує лук, разом з руківкою лука під час спільного прискореного руху стріли з тятивою також не залишається нерухомою. Отож на часі є створення аналітичної моделі взаємодії тіла стрільця з луком під час спільного прискореного руху стріли з тятивою.

Розглядаємо рух системи у вертикальній площині. Стрілець натягує й випускає тятиву двома-трьома пальцями. Процес сковзування тятиви з пальців триває певний проміжок часу й певною мірою визначає характер спільного руху стріли з тятивою. Однак, у першому наближенні, припускаємо, що гілки тятиви є сторонами кута з вершиною у гнізді, а сам випуск тятиви відбувається миттєво [1].

Після випуску тятиви стріла за рахунок тертя забирає зі свого шляху поличку, котра змінює своє положення, ховаючись до руківки. Оскільки маса й розміри полички несуттєво малі порівняно з відповідними параметрами стріли (а тим паче – лука), можна вважати, що після випуску тятиви стріла не контактує з руківкою лука. Після випуску тятиви взаємодія стрільця з луком відбувається за рахунок контактування руки стрільця (між великим та вказівним пальцями) з руківкою лука. Щільне взаємне прилягання по заглибинах руки та руківки обумовлює можливість взаємодії, котру можна змодельовати обертовим шарніром Н (рис. 1). Після відриву стріли від тятиви ця кінематична пара розривається, але під час спільного руху стріли з тятивою, який триває 0,01-0,02 секунди, модель обертової кінематичної пари є цілком прийнятною.

Моделюючи тіло стрільця, візьмемо за основу підхід теоретичного моделювання, коли тіло людини представляють у вигляді механічної системи абсолютно жорстких тіл, пружних елементів та демпферів. Розглянемо тіло стрільця, у першому наближенні, у вигляді елементарної шарнірно-стрижневої структурної групи (H-D-E), яка приєднана до стійки шарніром E та має в кінематичних парах D і E пружні елементи й демпфери. Оскільки переміщення тіла стрільця під час спільного руху стріли з тятивою є малими порівняно з характерними розмірами тіла й лука, цей шарнірно-стрижневий ланцюг доцільно представити у вигляді двох механічних осциляторів, приєднаних до лука у т. Н, положення якої у вертикальній площині

визначається двома узагальненими координатами: $F_A = \frac{2c(q_A + j)}{h_{r_A}}$. Поздовжня вісь верхньої кінцівки збігається з напрямком осі ДН.



Рис 1. Схема моделі тіла стрільця: а – у напрямку поздовжньої осі;
b – перпендикулярної осі

За узагальненими координатами $\frac{2q_A}{h}$ і x_H приведемо масу тіла стрільця, поділивши її на дві частини: відповідно, тулуба (m_{1x}) та верхньої кінцівки (m_{2x}). Масу верхньої кінцівки приводимо до руківки лука, оскільки осьова жорсткість випростаної кінцівки (c_{2x}) є суттєво більшою за приведену у цьому ж напрямку жорсткість тулуба з нижніми кінцівками (c_{1x}). Відповідні демпферні властивості верхньої кінцівки й тулуба враховують коефіцієнти k_{2x} і k_{1x} . Лінійні коефіцієнти c_{1x} , c_{2x} , k_{1x} , k_{2x} визначаємо як приведені до осі Ox значення кутових жорсткостей і демпферів у шарнірах D і E.

За узагальненою координатою h_H приводимо масу верхньої кінцівки, що має можливість кутових переміщень у плечовому, ліктьовому й променево-зап'ясному суглобах (m_h). Приведена жорсткість при таких переміщеннях (c_h) є суттєво нижчою за жорсткість тулуба й нижніх кінцівок при переміщенні осі плечового суглоба D у напрямку, паралельному осі h_H . Відповідні демпферні властивості враховує коефіцієнт k_h . Лінійні коефіцієнти c_h , k_h визначаємо як приведені у напрямку h_H значення кутової жорсткості і демпфера у шарнірі D.

Відповідно до прийнятої моделі тіла стрільця кінетична T_{archer} й потенціальна P_{archer} енергія, а також дисипативна функція Релея Φ_{archer} при його взаємодії з луком під час спільного руху стріли з тятивою мають бути представлені виразами (див. рис. 1):

$$T_{archer} = \frac{1}{2} (m_{1x} x_s'^2 + m_{2x} x_H'^2 + m_h h_H'^2);$$

$$P_{archer} = \frac{1}{2} [c_{1x} x_s^2 + c_{2x} (x_s - x_H)^2 + c_h h_H^2];$$

$$\Phi_{archer} = \frac{1}{2} \left[k_{1x} x_s'^2 + k_{2x} (x_s' - x_H')^2 + k_h h_H'^2 \right]. \quad (1).$$

у яких рискою позначено похідну по часу, тобто $(') \equiv d/dt$.

3. Моделювання підсистеми лук-стріла

Головним припущенням при створенні моделі системи лук-стріла є представлення руківки, плечей і стріли у вигляді абсолютно жорстких тіл, котрі утворюють кінематичний ланцюг, що рухається у головній (вертикальній) площині лука. Стабілізатор і приціл також розглядаються як абсолютно жорсткі тіла, а їхні інерційні властивості враховано в моделі руківки [15]. Кінетична енергія руківки, стабілізатора й прицілу, таким чином, може бути представлена виразом (рис. 2):

$$T_{handle} = \frac{1}{2} \int_{m_h} (x_h'^2 + h_h'^2) dm_h, \quad (2)$$

де $x_h = x_H + y + xk$; $h_h = h_H + x - yk$; k - кутове переміщення руківки відносно точки контакту з рукою стрільця H ; $Hxу$ – прямокутна система координат, що жорстко прив'язана до руківки.

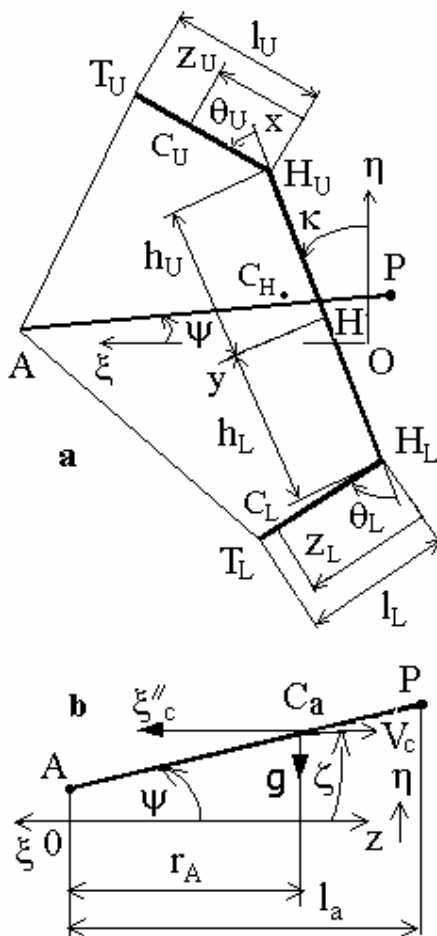


Рис. 2. Динамічна схема моделі лука (а) й стріли (б)

Підставляючи останні два вирази у (2), отримаємо:

$$T_{handle} = \frac{1}{2} \left[m_H (\mathbf{x}'_H{}^2 + h'_H{}^2) + I_H k'^2 + 2m_H k' (x'_{CH} x_{CH} - h'_{CH} y_{CH}) \right], \quad (3)$$

де m_H - маса руківки, стабілізатора й прицілу; x_{CH}, y_{CH} - координати їхнього центру мас; I_H - їхній момент інерції відносно т. Н.

Вирази кінетичної енергії плечей мають такий вигляд:

$$T_{U/L} = \frac{1}{2} \int_0^{l_{U/L}} m(z_{U/L}) (\mathbf{x}'_{U/L}{}^2 + h'_{U/L}{}^2) dz_{U/L},$$

де $l_{U/L}$ - довжина плеча; m - розподілена (погонна) маса; z - приєднана до плеча поздовжня координата. Індексми «U» та «L» позначено параметри відповідно верхнього та нижнього плечей. Підставляючи наступні вирази

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{U/L} &= \mathbf{x}_H \pm k \mathbf{h}_{U/L} + z_{U/L} \sin(q_{U/L} \pm k); \\ \mathbf{h}_{U/L} &= \mathbf{h}_H \pm z_{U/L} \cos(q_{U/L} \pm k) \end{aligned}$$

у вираз $T_{U/L}$, отримуємо вираз для загальної кінетичної енергії плечей:

$$T_{limbs} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &(m_U + m_L) (\mathbf{x}'_H{}^2 + h'_H{}^2) + (m_U h_U^2 + m_L h_L^2) k'^2 + \\ &I_U (q'_U + k')^2 + I_L (q'_L - k')^2 + \\ &2(m_U r_U - m_L r_L) \mathbf{x}'_H k' + 2k' \left[m_U r_U h_U (q'_U + k') \cos(q_U + k) \right. \\ &\quad \left. - m_L r_L h_L (q'_L - k') \cos(q_L - k) \right] + \\ &2\mathbf{x}'_H \left[m_U r_U (q'_U + k') \cos(q_U + k) \right. \\ &\quad \left. + m_L r_L (q'_L - k') \cos(q_L - k) \right] \\ &- 2\mathbf{h}'_H \left[m_U r_U (q'_U + k') \sin(q_U + k) \right. \\ &\quad \left. - m_L r_L (q'_L - k') \sin(q_L - k) \right] \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

де $m_{U/L}$ - маса плечей; $I_{U/L}$ - моменти інерції плечей відносно осей кріплення їх до руківки (точки $H_{U/L}$); $r_{U/L}$ - відстані від цих точок до центрів мас плечей.

Вирази для потенціальної енергії плеча мають такий вигляд [17] (див. рис. 2 а):

$$P_{U/L} = \frac{1}{2} c_{U/L} (q_{U/L} + j_{U/L})^2, \quad (5)$$

де; c_U, c_L - жорсткість плечей.

Вираз для кінетичної енергії тятиви складається з трьох частин відповідно до трьох точок приведення маси тятиви, а саме, двох точок кріплення гілок тятиви до плечей, а також гнізда тятиви [19] (тобто точки контакту з хвостовиком стріли):

$$T_{string} = \frac{1}{2} \frac{m_s}{3} \left[\mathbf{x}'_A{}^2 + h'_A{}^2 + \frac{2s_U^*}{s^*} (\mathbf{x}'_{TU}{}^2 + h'_{TU}{}^2) + \frac{2s_L^*}{s^*} (\mathbf{x}'_{TL}{}^2 + h'_{TL}{}^2) \right], \quad (6)$$

де m_s - маса тятиви; $s_{U/L}^*$ - довжина гілки у нерозтягнутому стані тятиви (загальна довжина тятиви складає $s^* = s_U^* + s_L^*$).

Вирази потенціальної енергії гілок тятиви мають такий вигляд [19]:

$$P_{s(U/L)} = \frac{f(s_{U/L} - s_{U/L}^*)^2}{2s_{U/L}^*}, \quad (7)$$

де f - розподілена жорсткість тятиви; $s_{U/L}$ - довжина гілки тятиви у розтягнутому стані.

Вираз кінетичної енергії стріли має такий вигляд [14] (див. рис. 2 б):

$$T_{arrow} = \frac{1}{2} \int_0^{l_a} m_a(z_a) (\dot{x}_a'^2 + \dot{h}_a'^2) dz_a + \frac{1}{2} m_p [\dot{x}_a'^2 + \dot{h}_a'^2]_{z_a=l_a}, \quad (8)$$

де l_a - довжина стріли; m_a розподілена маса стріли древка стріли; z_a - прив'язана до стріли поздовжня координата; m_p - маса наконечника стріли.

Згідно з прийнятою моделлю взаємодія стріли з луком відбувається тільки через гніздо тятиви. Вихідна позиція стріли відносно лука у його головній (вертикальній) площині визначається положенням полицки, на яку спирається стріла своєю передньою частиною у момент випуску тятиви.

Результати аналізу зображень швидкісної відеозйомки показують, що можна припустити у першому наближенні рух стріли як плоский рух недеформівного стрижня [7, 12]. Підставляючи у вираз (8) відповідні вирази $h_a = h_A + z_a y$, отримуємо:

$$T_{arrow} = \frac{1}{2} m_a (\dot{x}_A'^2 + \dot{h}_A'^2 + 2r_A \dot{h}_A' y') + I_A y'^2, \quad (9)$$

де m_a - маса стріли; r_A - відстань від хвостовика стріли, котрий "сидить" у гнізді тятиви, до центру мас стріли.

Потенціальна енергія накопичується у стрілі внаслідок повороту її відносно гнізда тятиви й складається з двох частин. Цю енергію обчислювали як сума роботи сил інерції (згідно з принципом Даламбера) на можливих поздовжніх переміщеннях та роботи гравітаційних сил ($y \ll 1$):

$$P_{arrow} = m_a r_A \left[\frac{1}{2} \dot{x}_A'' (y^2 - y_0^2) + g(y - y_0) \right], \quad (10)$$

де y_0 - початковий кут піднесення стріли.

4. Динаміка системи

Після певних математичних перетворень у виразах (1, 3-7, 9, 10), ми отримуємо вирази для повної кінетичної і потенціальної енергії системи стрілець-лук-стріла під час спільного руху стріли з тятивою:

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & (m_{2x} + m_H + m_U + m_L) \dot{x}_H'^2 + (m_h + m_H + m_U + m_L) \dot{h}_H'^2 + \\ & (I_H + m_U h_U^2 + m_L h_L^2) \dot{k}'^2 + 2m_H k' (x'_H x_{CH} - h'_H y_{CH}) + \\ & I_U (q'_U + k')^2 + I_L (q'_L - k')^2 + 2(m_U r_U - m_L r_L) \dot{x}_H k' \\ & + m_A (\dot{x}_A'^2 + \dot{h}_A'^2) + 2m_a r_A \dot{h}'_A y' + I_{AY} y'^2 + m_{1x} \dot{x}_s'^2 + \\ & 2k' [m_U r_U h_U (q'_U + k') b_1 - m_L r_L h_L (q'_L - k') b_3] \\ & + 2\dot{x}'_H [m_U r_U (q'_U + k') b_1 + m_L r_L (q'_L - k') b_3] \\ & - 2\dot{h}'_H [m_U r_U (q'_U + k') b_2 - m_L r_L (q'_L - k') b_4] \end{aligned} \right\};$$

$$P = \frac{1}{2} \left[c_{1x} x_s^2 + c_{2x} (x_s - x_H)^2 + c_h h_H^2 + c_U (q_U + j_U)^2 + c_L (q_L + j_L)^2 + \right. \\ \left. \frac{f}{s_U^*} (s_U - s_U^*)^2 + \frac{f}{s_L^*} (s_L - s_L^*)^2 + m_a r_A [x_A'' (y^2 - y_0^2) + 2g(y - y_0)] \right], \quad (11)$$

де $b_1 = \cos(q_U + k)$; $b_2 = \sin(q_U + k)$; $b_3 = \cos(q_L - k)$; $b_4 = \sin(q_L - k)$;
 $m_A = \frac{1}{3} m_s + m_a$.

Розв'язуючи задачу динаміки, ми не враховуємо дії гравітаційних сил на переміщення лука, вважаючи, що вони врівноважені рукою стрільця. Натомість гравітаційні сили, що діють на стрілу, є сумірними за величиною з інерційними силами, тому їхнім впливом на зміну положення стріли нехтувати не слід.

Підставляючи вирази (1, 11) у рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = F_i,$$

отримуємо систему диференціальних рівнянь другого порядку відносно узагальнених координат $q_i \equiv x_s, x_H, h_H, k, q_U, q_L, x_A, h_A, y$:

$$\begin{aligned} & m_{1x} \ddot{x}_s + c_{1x} x_s + c_{2x} (x_s - x_H) + k_{1x} \dot{x}_s' + k_{2x} (x_s' - x_H') = F_{1x}; \\ & (m_H + m_U + m_L + m_{2x}) \ddot{x}_H + c_{2x} (x_H - x_s) + k_{2x} (x_H' - x_s') + \\ & m_U r_U [b_1 (q_U'' + k'') - b_2 (q_U' + k')^2] + m_L r_L [b_3 (q_L'' - k'') - b_4 (q_L' - k')^2]; \\ & + (m_H x_{CH} + m_U h_U - m_L h_L) \ddot{k} + e_U S_{Ux} + e_L S_{Lx} = F_{2x} \\ & m_U r_U [b_2 (q_U'' + k'') + b_1 (q_U' + k')^2] + m_L r_L [b_4 (q_L'' - k'') + b_3 (q_L' - k')^2] + \\ & (m_H + m_U + m_L + m_h) \ddot{h}_H + c_h h_H + k_h \dot{h}_H' - m_H y_{CH} \ddot{k} - e_U S_{Uh} + e_L S_{Lh} = F_h; \\ & (I_H + I_U + I_L + m_U h_U^2 + m_L h_L^2) \ddot{k} + I_U q_U'' - I_L q_L'' \\ & + m_U r_U h_U [b_1 (q_U'' + 2k'') - b_2 (q_U' + k')^2] - m_L r_L h_L [b_3 (q_L'' - 2k'') - b_4 (q_L' - k')^2] + \\ & [m_H x_{CH} + m_U (h_U + b_1 r_U) - m_L (h_L + b_3 r_L)] \ddot{x}_H \\ & - (m_H y_{CH} + m_U r_U b_2 + m_L r_L b_4) \ddot{h}_H + \\ & + e_U [S_{Ux} (b_1 l_U + h_U) - S_{Uh} b_2 l_U] - e_L [S_{Lx} (b_3 l_L + h_L) + S_{Lh} b_4 l_L] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& I_U(\mathbf{q}_U'' + \mathbf{k}'') + m_U r_U h_U b_1 \mathbf{k}'' + m_U r_U (b_1 \mathbf{x}_H'' - b_2 \mathbf{h}_H''); \\
& + c_U(\mathbf{q}_U + \mathbf{j}_U) + e_U l_U (S_{Ux} b_1 - S_{Uh} b_2) = 0; \\
& I_L(\mathbf{q}_L'' - \mathbf{k}'') - m_L r_L h_L b_3 \mathbf{k}'' + m_L r_L (b_3 \mathbf{x}_H'' + b_4 \mathbf{h}_H''); \\
& + c_L(\mathbf{q}_L + \mathbf{j}_L) + e_L l_L (S_{Lx} b_3 + S_{Lh} b_4) = 0; \\
& m_A \mathbf{x}_A'' - e_U S_{Ux} - e_L S_{Lx} = 0; \\
& m_A \mathbf{h}_A'' + m_a r_A \mathbf{y}'' + m_a g - e_U S_{Uh} - e_L S_{Lh} = 0; \\
& I_A \mathbf{y}'' + m_a r_A (\mathbf{h}_A'' + \mathbf{x}_A'' \mathbf{y} + g) = 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

де F_i - узагальнені сили;

$$\begin{aligned}
S_{Uh} &= \mathbf{h}_H + h_U + l_U b_1 - \mathbf{h}_A; \quad S_{Lh} = \mathbf{h}_H - h_L + l_L b_3 - \mathbf{h}_A; \\
S_{Ux} &= \mathbf{x}_H + h_U \mathbf{k} + l_U b_2 - \mathbf{x}_A; \quad S_{Lx} = \mathbf{x}_H - h_L \mathbf{k} + l_L b_4 - \mathbf{x}_A \\
e_U &= \frac{f(s_U - s_U^*)}{s_U s_U^*}; \quad e_L = \frac{f(s_L - s_L^*)}{s_L s_L^*}; \\
s_U &= \sqrt{S_{Ux}^2 + S_{Uh}^2}; \quad s_L = \sqrt{S_{Lx}^2 + S_{Lh}^2}.
\end{aligned}$$

Початкові умови задачі мають вигляд:

$$\begin{aligned}
t = 0, \mathbf{x}_s = 0; \mathbf{x}_H = \mathbf{x}_{H0}; \mathbf{h}_H = \mathbf{h}_{H0}; \mathbf{x}_A = \mathbf{x}_{A0}; \mathbf{h}_A = \mathbf{h}_{A0}; \mathbf{q}_U = \mathbf{q}_{U0}; \\
\mathbf{q}_L = \mathbf{q}_{L0}; \mathbf{k} = 0; \mathbf{y} = \mathbf{y}_0; \\
\mathbf{x}'_s = 0; \mathbf{x}'_H = 0; \mathbf{h}'_H = 0; \mathbf{x}'_A = 0; \mathbf{h}'_A = 0; \mathbf{q}'_U = 0; \mathbf{q}'_L = 0; \mathbf{k}' = 0; \mathbf{y}' = 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

де константи \mathbf{h}_{A0} , \mathbf{q}_{U0} , \mathbf{q}_{L0} , \mathbf{x}_{H0} , \mathbf{h}_{H0} є розв'язками задачі статички [1]. Нульові значення похідних у початкових умовах відповідають прийнятій моделі техніки виконання пострілу зі спортивного лука (затамоване дихання й нерухома поза).

Згідно з результатами поверхневої електроміографії рухова програма стрільця на випуск тятиви формується ще перед тим, як лунає сигнал від клікера. Така програма може бути класифікована як “відкритий ланцюг”. Передвісником порушення статичного балансу сил у поясі верхніх кінцівок тіла стрільця є стрімко зростаюча активність тільки м'яза *m. pectoralis major* [1]. Цей м'яз активується до зміни статичного балансу сил у латеральній площині системи, тоді як зміни активності інших м'язів не зафіксовано. Тому узагальнені сили в рівняннях (12), що описують стан системи у вертикальній площині, слід вважати нульовими: $F_i = 0$.

Напрямок руху стріли, що визначається напрямком вектора швидкості її центра мас, описується такими виразами:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\mathbf{h}'_A + r_A \mathbf{y}'}{-\mathbf{x}'_A}; \quad \mathbf{a} = \mathbf{y} - \mathbf{z}, \tag{14}$$

де z - кут нахилу вектора швидкості центра мас стріли до горизонту; \mathbf{a} - кут атаки. Стріла полишає гніздо тятиви в момент, коли прискорення поздовжнього руху спадає до нуля ($\mathbf{x}''_A = 0$).

Система рівнянь (12) з початковими умовами (13) являє собою задачу Коші для звичайних нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Оскільки отримати розв'язки такої задачі у замкненій формі неможливо, застосуємо метод Рунге-Кутта. Скористаємося програмною реалізацією цього методу 'NDSolve' (Method Explicit Runge-Kutta) з пакету системи комп'ютерної математики Mathematica 4.1 (www.wolfram.com).

Ця математична модель описує динаміку системи стрілець-лук-стріла у вертикальній площині (строго кажучи, мова йде про спільний рух елементів системи у проекції на вертикальну площину). Насправді система знаходиться у просторовому русі, однак, переміщення у латеральній площині є на два порядки меншими від переміщень у вертикальній площині. Відповідні енергетичні потоки мають між собою подібне співвідношення [7].

5. Механіко-математична модель системи у статиці

Розглянемо характер взаємодії стрільця з луком в момент перед випуском тятиви. Сучасна спортивна техніка стрільби передбачає стабільний упор у руківку лука без стискання її рукою стрільця. Загальний центр мас лука знаходиться в точці прикладення рівнодійної сили взаємодії руки з руківкою лука. Близько 90% загальної маси лука складає маса руківки, стабілізаторів, прицілу й недеформівних частин плечей [20]. Власне, маса рухомих відносно руківки елементів плеча разом із масою стріли й тятиви складає тільки 3% від загальної маси лука. Відповідні сили ваги є несуттєво малими порівняно з силою розтягування лука. Тобто сили ваги елементів лука практично не впливають на конфігурацію лука, а їхня рівнодійна врівноважується складовою сили упору руки стрільця в руківку лука. Отже, розглядаючи задачу статики, можна прийняти, що на лук по одній лінії діють дві однакові за величиною й протилежно напрямлені сили рук стрільця, що прикладені до руківки й тятиви відповідно в т.О і т.А (рис. 3).

Відповідна математична модель розтягнутого лука має форму системи рівнянь:

$$\begin{aligned}
 x_A &= l_U \sin q_U + s_U \sin g_U; & x_A &= l_L \sin q_L + s_L \sin g_L; \\
 h_A &= h_U + l_U \cos q_U - s_U \cos g_U; & h_A &= s_L \cos g_L - l_L \cos q_L - h_L; \\
 h_A &= h_U + l_U \cos q_U - s_U \cos g_U; & h_A &= s_L \cos g_L - l_L \cos q_L - h_L; \\
 c_U(q_U + j_U) &= F_U l_U \sin(q_U + g_U); & c_L(q_L + j_L) &= F_L l_L \sin(q_L + g_L); \\
 F_x &= -F_U \sin g_U - F_L \sin g_L; & F_h &= F_U \cos g_U - F_L \cos g_L; \\
 F_U &= f \frac{s_U - s_U^*}{s_U^*}; & F_L &= f \frac{s_L - s_L^*}{s_L^*}; & \operatorname{tg} f &= \frac{F_h}{F_x}; & \operatorname{tg} f &= \frac{h_A}{x_A}, \quad (15)
 \end{aligned}$$

де F_U, F_L - сили натягу гілок тятиви; F_x, F_h - проекції сили розтягу лука на осі координат; x_A - величина розтягу лука, котра визначається довжиною стріли.

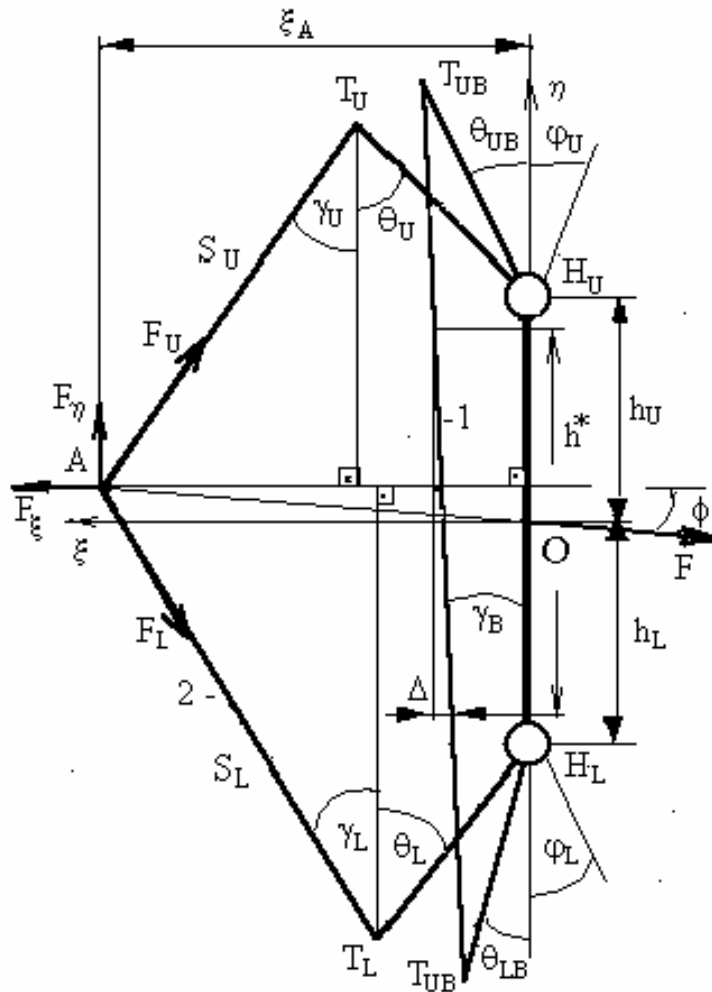


Рис. 3. Схема статичної моделі: 1 – положення лука з підв’язаною тятивою, 2 – лук у розтягнутому положенні.

Початкові умови для координат точки контакту руківки з рукою стрільця є такі:

$$x_{H0} = \frac{F_x}{c_{2x}}; \quad h_{H0} = \frac{F_h}{c_h} \quad (16)$$

Математична модель лука з підв’язаною тятивою має вигляд системи рівнянь:

$$\begin{aligned} l_U \cos q_{UB} + l_L \cos q_{LB} + h_U + h_L &= 2s_B \cos g_B; \\ l_U \sin q_{UB} - l_L \sin q_{LB} &= 2s_B \sin g_B; \\ F_B l_U \sin(q_{UB} - g_B) &= c_U (q_{UB} + j_U); \\ F_B l_L \sin(q_{LB} + g_B) &= c_L (q_{LB} + j_L); \quad F_B = f \frac{s_B - s^*}{s} \end{aligned} \quad (17)$$

де s_B - довжина тятиви у підв’язаному до лука стані; F_B - сила натягу тятиви (див. рис. 3). Тут і далі позначення з індексом “В” стосуються лука з підв’язаною тятивою.

Системи (3) і (4) включають трансцендентні нелінійні рівняння, що не дозволяє отримати їхні розв’язки в аналітичній формі. Тому для розв’язання

задач статики системи лук-стріла нами застосовано чисельний метод, реалізований у програмі Find з пакету Mathcad 2000i Professional (www.mathcad.com).

6. Механіко-математична модель плеча лука

На сьогодні, аналізуючи механічні проблеми спортивної стрільби, плече лука моделюють гнучким криволінійним стержнем [4] або жорстким прямолінійним стержнем із зосередженим пружним елементом на осі шарніра, що з'єднує цей стержень з руківкою [12]. Обидві ці моделі мають свої переваги й недоліки. Якщо йдеться про аналіз напружено-деформованого стану плеча, про вплив його форми на ефективність лука, перевагу надають першій моделі [5,17].

Якщо ж на перший план висувуються проблеми статики й динаміки лука й стріли (як цілісної механічної системи), то перевагу надають другій моделі. Параметри цієї моделі (приведена довжина плеча, положення центра маси, момент інерції та жорсткість) для спрощеного варіанту плеча плоскої (у вільному стані) трикутної форми й сталої товщини визначив Гікманом [3]. За всієї продуктивності моделі Гікмана її практичне застосування для сучасного спортивного лука, на наш погляд, вимагає принципово іншого підходу до визначення параметрів моделі, оскільки плечі сучасних луків мають змінну товщину й суттєво криволінійні периферійні ділянки. Окрім того, Гікман застосував лінійну модель стержня, котра дає значні похибки для переміщень, сумірних із довжиною стержня, що, власне, й є характерним для плеча лука.

Ми пропонуємо експериментально-розрахунковий метод для визначення параметрів плеча. У симетричному стані визначено геометрію лука у двох положеннях (рис. 4): з підв'язаною тятивою (В) та при повному розтязі лука (А). Пунктирними лініями на схемі показано модель плеча й ділянки тятиви, що в положенні В прилягає до плеча. Початок прямокутної системи координат O розміщено посередині лука, вісь Ox є віссю симетрії, а вісь Oh спрямовано уздовж руківки.

Приймаємо, що в підв'язаному положенні частина тятиви, що прилягає до плеча ($B'T'$), продовжує пряму лінію середньої частини тятиви ($B'T_B$). Відповідно віртуальне плече моделі є відрізком прямої лінії ($T_B H$), що з'єднує кінець тятиви з віссю руківки. З геометричних співвідношень (див. рис. 4 а)

$$(h_{T_A} - h_H)^2 + x_{T_A}^2 = l^2; (h_{T_B} - h_H)^2 + x_{T_B}^2 = l^2$$

отримано геометричні параметри моделі:

$$h_H = \frac{l_{OT_B}^2 - l_{OT_A}^2}{2(h_{T_B} - h_{T_A})}; l = \sqrt{\frac{l_{OT_A}^2 + l_{OT_B}^2}{2} - h_H(h_{T_A} + h_{T_B} - h_H)}, \quad (18)$$

де l - приведена довжина плеча; $l_{OT_A} = OT_A$; $l_{OT_B} = OT_B$.

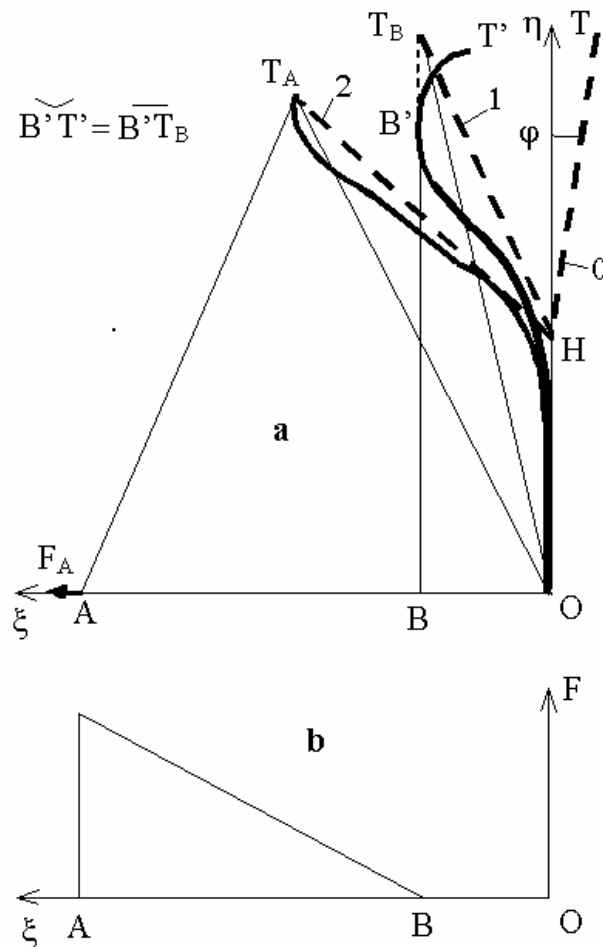


Рис. 4. Схема для визначення параметрів моделі плеча лука (а): 0 – плече у вільному стані (без тятиви), 1 – з напнутою тятивою, 2 – при розтягнутому луці; графік залежності сили лука від величини розтягу (б).

Із силових, енергетичних та геометричних співвідношень (див. рис. 4 а,

$$b) E = \int_0^{x_A - x_B} F dx \approx \frac{1}{2} F_A (x_A - x_B);$$

$$E = c[(q_A + j)^2 - (q_B + j)^2]; F_A = \frac{2c(q_A + j)}{h_{T_A}}$$

отримано силові параметри моделі:

$$c = \frac{F_A h_{T_A}}{2(q_A + j)}; j = \frac{2kq_A - q_A^2 + q_B^2}{2(q_A - q_B - k)}, \quad (19)$$

де E, F_A - відповідно потенціальна енергія плечей та сила натягнутого лука; c - приведена до руківки жорсткість плеча; $q_A = \angle hNT_A$; $q_B = \angle hNT_B$; j -

кут моделі плеча у вільному положенні (без тятиви); $k = \frac{E}{F_A h_{T_A}}$. Решта

позначень мають бути зрозумілими зі схеми (див. рис. 4).

Останні моделі спортивних луків комплектуються номінально однаковими верхнім і нижнім плечами. Однак деякі попередні моделі спортивних луків мають плечі принципово різної форми та жорсткості [24]. Описаний вище метод дозволяє визначити параметри моделі окремо для верхнього та нижнього плечей.

7. Приклад

Розглянемо для прикладу висококваліфікованого спортсмена-стрільця, лук якого відповідає стандарту FITA (WIN&WIN Recurve Bow) та має середні за величиною параметри. Лук складається з руківки типу Winact Riser (25" = 635 мм) та довгих плечей (70" = 1778 мм). Маркування основних розмірів сучасних спортивних луків виконують у традиційних одиницях – дюймах (1" = 25,4 мм). Сила лука $F = 178$ Н. Довжина руківки складає $h^* = 635$ мм (див. рис. 3), а загальна довжина лука, яка вимірюється між канавками для підв'язування тятиви на кінцях плечей, складає 1778 мм. Стандартною мірою асиметрії лука у вертикальній площині є „тиллер”, величина якого у досліджуваному прикладі складає $\Delta = 6$ мм. Циліндрична алюмінієва стріла марки No 2414 - 30" має наконечник, маса якого відповідає положенню загального центра мас стріли на відстані, що складає 15% від загальної довжини стріли, від її геометричного центра у бік наконечника.

Розрахункові параметри лука (див. попередні розділи): $l_U = l_L = 531$ мм; $m_U = 106$ г; $m_L = 107$ г; $I_U = 68,1$ кгсм²; $I_L = 68,3$ кгсм²; $r_U = 227$ мм; $r_L = 228$ мм; $c_U = c_L = 69,1$ Нм; $j_U = 0,6047$; $j_L = 0,6076$ $h_U = h_L = 342$ мм; $m_H = 2,13$ кг; $I_H = 2128$ кгсм²; $x_{CH} = -21$ мм; $y_{CH} = -34$ мм; $s_U^* = 780$ мм; $s_L^* = 840$ мм; $f = 255$ Н/см; $m_s = 7$ г; $x_{A0} = 758$ мм.

У положенні з напнутою тятивою параметри лука отримуємо, розв'язуючи систему рівнянь (17): $q_{UB} = 0,4666$; $q_{LB} = 0,4342$; $s_B = 820$ мм; $g_B = 0,00945$; $F_B = 316$ Н.

Параметри стріли є такими: $l_a = 783$ мм; $m_a = 22,4$ г; $I_A = 73,6$ кгсм²; $r_A = 510$ мм.

Параметри тіла стрільця: $m_{1x} = 26$ кг; $m_{2x} = 3,8$ кг; $m_h = 2,1$ кг; $c_{1x} = 11,6$ Н/мм; $c_{2x} = 19,0$ Н/мм; $c_h = 9,43$ Н/мм; $k_{1x} = 237$ кг/с; $k_{2x} = 78$ кг/с; $k_h = 45$ кг/с.

Розв'язуючи систему рівнянь (15), а також використовуючи вирази (16), отримуємо початкові умови (13): $h_{A0} = 42,6$ мм; $q_{U0} = 0,7655$; $q_{L0} = 0,7942$; $x_{H0} = 9,4$ мм; $h_{H0} = 1,1$ мм. Решта результатів розв'язання цієї задачі, які необхідні для аналізу динаміки системи, є такими: $s_U = 786$ мм; $s_L = 846$ мм; $g_U = 0,5189$; $g_L = 0,4641$; $F_U = 186$ Н; $F_L = 192$ Н; $F_x = 178$ Н; $F_h = 10$ Н.

Головні результати розв'язання задачі динаміки системи стрілець-лук-стріла під час спільного прискореного руху стріли з тятивою для положення полочки $h_{P0} = 37$ мм представлено у графічному вигляді (рис. 5, 6, 7).

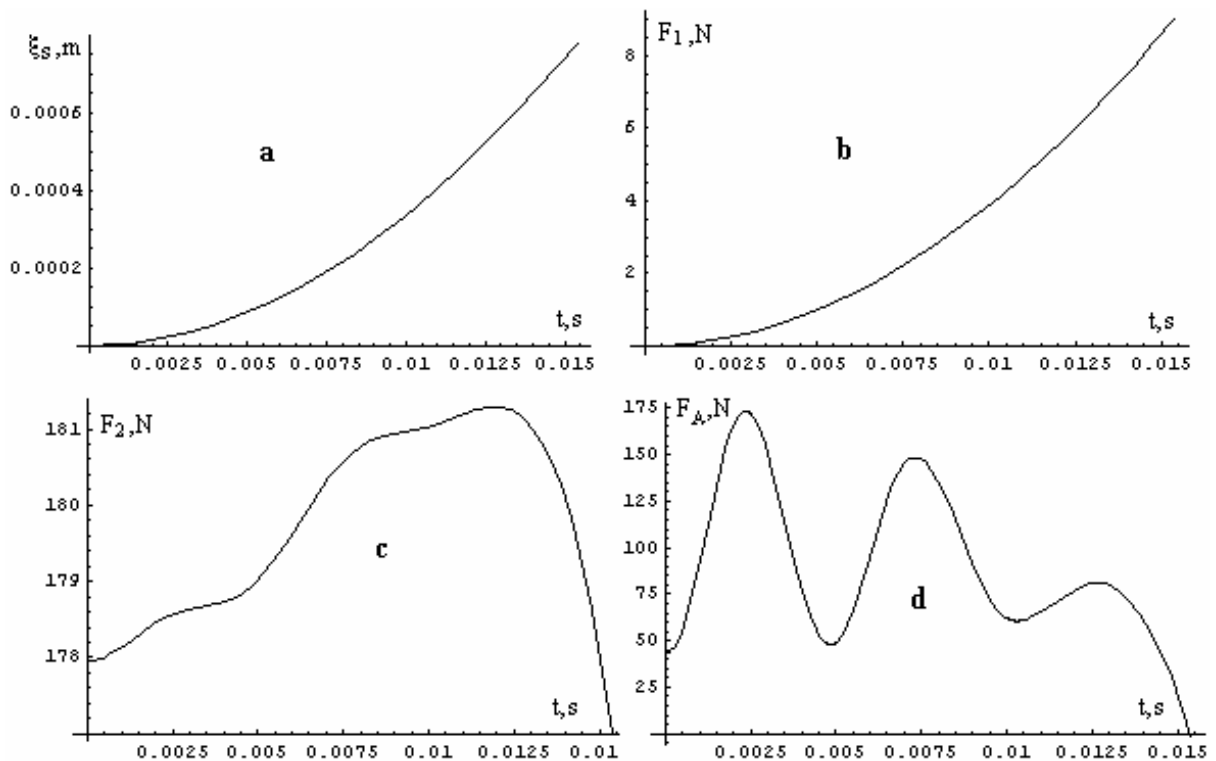


Рис. 5. Графіки параметрів взаємодії стрільця з луком: а – переміщення верхньої частини тулуба; б – сила віддачі, що передається через тулуб на землю; с – сила віддачі, що діє від руківки на руку стрільця; d – сила прискорення, що діє від тятиви на стрілу.

Час спільного руху (від моменту випуску тятиви до моменту відходу стріли від гнізда тятиви) склав 0,0154 с. Максимальну швидкість стріли ($v_A = 62$ м/с) визначали на момент, коли прискорення поздовжнього руху стріли спало до нуля (k_{1x} , див. рис. 6 а).

Величина сили віддачі (F_2), що діє між руківкою лука й рукою спортсмена, після випуску тятиви коливалася в межах 3 % відносно її початкового (статичного) значення (див. рис. 5 с), хоча сила тятиви, що спричинила прискорений рух стріли, змінювала свою величину приблизно у 3 рази (див. рис. 5 d). Амортизована приблизно у 20 разів (див. рис. 5 b) сила віддачі передається через тіло стрільця до землі, супроводжуючись відповідним приведеним переміщенням верхньої частини тулуба в межах 1 мм (див. рис. 5 а).

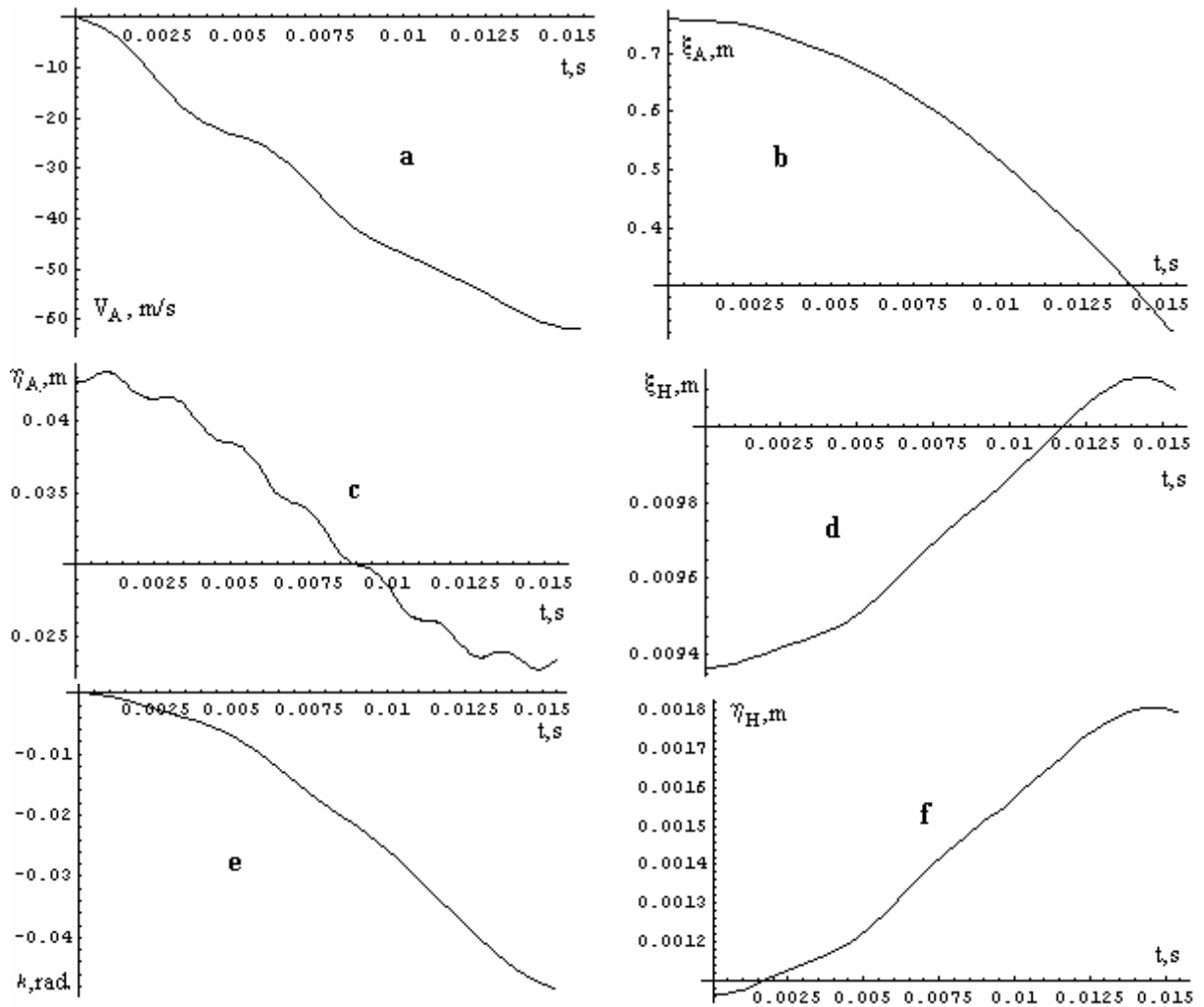


Рис. 6. Параметри взаємодії стріли з луком: а – поздовжня швидкість стріли; б – поздовжнє переміщення стріли; с – перпендикулярне переміщення гнізда тятиви; д – поздовжнє переміщення точки контакту руківки лука з рукою стрільця; е – кутове переміщення руківки лука; ф – перпендикулярне переміщення точки контакту руківки лука з рукою стрільця.

Унаслідок різного характеру статичного й динамічного балансу сил вихід стріли з гнізда тятиви відбувається дещо глибше, тобто ближче до руківки ($x_A = 223$ мм, див. рис. 6 б), ніж у положенні лука з підв'язаною тятивою ($x_A = 231$ мм, див. рис. 3).

Переміщення точки контакту руківки лука з рукою стрільця складає приблизно один міліметр (див. рис. 6 д, ф), а саме: поздовжня координата змінюється в межах $9,4 \leq x_H \leq 10,2$ мм, а перпендикулярна – в межах $1,1 \leq y_H \leq 1,8$ мм.

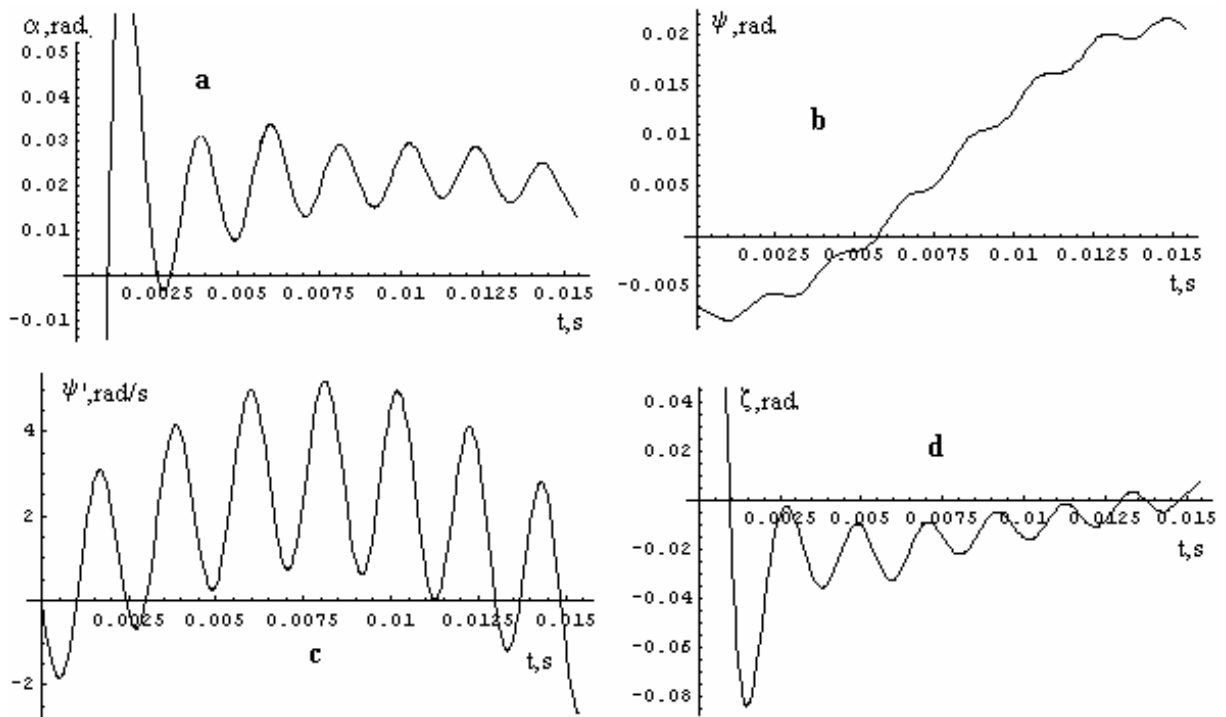


Рис. 7. Параметри внутрішньої балістики стріли: а – кут атаки стріли; б – кут між віссю стріли й напрямком її поздовжнього переміщення; с – кутова швидкість стріли у вертикальній площині; d – кут між вектором швидкості центру мас стріли й напрямком її поздовжнього переміщення.

Спільний рух стріли з тятивою (внутрішня балістика) супроводжується інтенсивними вібраціями у вертикальному напрямку, які виникають унаслідок порушення статичного балансу сил у момент випуску тятиви. Спостерігається сім повних циклів таких коливань за вказаний проміжок часу. Результати комп'ютерного моделювання дають можливість визначити узгоджені параметри системи стрілець-лук-стріла, за яких досягається мінімізація кута атаки стріли, а також кутової швидкості її обертового руху у вертикальній площині на момент виходу стріли з гнізда тятиви (див рис. 7).

8. Висновки

1. Результати комп'ютерного моделювання системи стрілець-лук-стріла добре корелюють з відомими результатами швидкісної відеозйомки [7] стосовно суттєво нелінійного характеру процесів, що відбуваються під час спільного руху стріли з тятивою.

2. Сила віддачі, яка виникає між руківкою лука й рукою стрільця, після випуску тятиви змінює свою величину несуттєво (у межах приблизно 3%) відносно початкового (статичного) свого значення. Сила віддачі передається через тіло стрільця на землю, зменшуючись унаслідок амортизації приблизно у 20 разів. Відповідне переміщення верхньої частини тулуба стрільця знаходиться в межах одного міліметра.

3. Унаслідок різниці у характері статичного й динамічного балансу сил вихід стріли з гнізда тятиви відбувається в положенні, на декілька міліметрів ближчому порівняно з положенням, коли тятива підв'язана.

4. Спільний рух стріли з тяговою супроводжується інтенсивними коливаннями, спричиненими порушенням статичного балансу сил у системі в момент випуску тятиви. Сила тятиви, що прискорює стрілу, суттєво змінює свою величину (приблизно в 3 рази). За час спільного руху в системі відбувається сім повних циклів коливань.

Література

1. Edelman-Nusser J., Gollhofer A. Coordinative aspects of archery – an approach using surface electromyography // XVI Int. Symp. Biomechanics in Sports Ed.: H.J. Riehle, M.M. Vieten. Proc. II. - Konstanz: UVK, 1998. – P.153-156.
2. Gros H., Zanevskyy I. Archer-bow-arrow system adjustment in the vertical plane // Scientific proceeding of the XX International Symposium of Biomechanics in Sports Ed. K.E.Gianikellis. – Spain: Universided de Extremadura, 2002. – P.469-472.
3. Hickman C.N., Nagler F., Klopsteg P.E. Archery: the technical side. – Redlands: National Field Archery Association, 1947. – 148 p.
4. Kooi B.W. Bow-arrow interaction in archery // Journal of Sports Sciences. – 1998. – №16. – P. 721-731.
5. Ohsima S. & Ohtsuki A. Simulation of the shape and dynamics of Japanese bow – Application of large deflection theory // The book of the 4th Int. conf. on the Engineering of Sport. - Kyoto, Japan, 2002. - P.102-107.
6. Pkkalski R. Modelling and simulation research of the competitor-bow-arrow system: Unpublished doctoral dissertation. – Warszawa: AWF, 1987.
7. Werner Beiter Zeigt. Highspeed film. – 1992.
8. Zanevskyy I. Dynamics of “arrow-bow” system // Journal of Automation and Information Sciences. – 1999. - №31 (3). - P.11-17
9. Zanevskyy I. Lateral deflection of archery arrows // Sports Engineering.- 2001.- Vo 4. - No 1. - P.23-42.
10. Заневський І.П. Технічний аспект налаштування спортивного лука // Технічні вісті. - 2001. - №1 (12). - С.24-29.
11. Zanevskyy I., Ohirko I. Mechanical and mathematical modelling of bow and arrow interaction // Acta of Bioengineering and Biomechanics. – 2002. - №4. - Suppl. 1. – P.615-616.
12. Заневський І.Ф. Математическое и компьютерное моделирование системы “спортсмен-лук-стрела” // Наука в олимпийском спорте. - 2005. - №2. – С.128-136.
13. Zanevskyy I. Bow and arrow dynamics in the vertical plane // Vibrations in physical systems. – Poznac, 2004. – P.93-97.
14. Заневський І.П. Балістика стріли спортивного лука. // Технічні вістію – 2004. - №2 (19). - С. 43-47.
15. Заневський І.П. Динаміка системи лук-стріла у вертикальній площині // Машинознавство. - 2003. - № 8. - С.7-15.

16. Zanevskyy I. A model of string-limbs stiffness in the lateral plane of the sport bow // The engineering of sport 4 / Ed. S.Ujihachi & S.J.Haake. - Oxford, UK: Blackwell Publishing, 2002. – P.65-71.
17. Zanevskyy I. Mechanical and mathematical modelling and computer simulation of vibration and impact processes in the “Man and Shooting Device” system // Virtual Non-linear Multibody Systems / NATO Advance Study Institute. - Prague, 2002. - Vo 1. - P.248-252.
18. Заневський І.П. Налаштування параметрів спортивного лука у вертикальній площині // Зб. ст. II Міжнар. наук.-практ. конф., присвяч. 70-річчю утворення Міжнар. федер. стрільби з лука – FITA. – Л., 2001. - С. 10-22.
19. Zanevskyy I. String materials regarding bow and arrow dynamics // A collection of papers “Materials and Science in Sports”. - Coronado, California, USA, 2001. – P.83-93.
20. Заневський І.П. Методика моделювання та аналізу параметрів пострілу зі спортивного лука: Дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.02 / ФМІ НАН України. – Л., 1996. – 255 с.